ЦИКЛИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФРЕЙМОВ*

А. М. Дурягин — duriagin@syktsu.ru
В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru
А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

13 февраля 2010 г.

1°. Напомним, что нормированный жёсткий фрейм $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ в $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ называется *циклическим*, если

$$\langle \varphi_{k+1}, \varphi_{s+1} \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_s \rangle, \qquad k, s \in 0 : m-1, \tag{1}$$

где $\varphi_m = \varphi_0$. Таким образом, циклический фрейм это, во-первых, нормированный жёсткий фрейм и, во-вторых, для него выполняется соотношение (1).

Из результатов доклада [1], в котором рассмотрены более общие циклические фреймы, следует такое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для того чтобы система $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ векторов из $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ была циклическим фреймом, необходимо и достаточно, чтобы нашлась унитарная матрица U порядка n, такая, что*

$$\varphi_k = U^k \varphi_0\,, \qquad k \in 0 : m-1; \tag{2}$$

при этом матрица U должна обладать двумя дополнительными свойствами:

(i) *её собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ суть попарно различные корни степени m из единицы;*

(ii) *соответствующие ортонормированные собственные векторы $p_1, \ldots, p_n$ связаны с вектором φ_0 условием*

$$\big|\langle \varphi_0, p_j \rangle\big| = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,, \qquad j \in 1 : n. \tag{3}$$

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

В данном докладе мы приведём примеры вещественных циклических фреймов.

2°. Рассмотрим вещественный гармонический фрейм [2]. При $n = 2\nu + 1$ положим

$$\varphi_k(1) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,; \quad \varphi_k(2j) = \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,\cos\tfrac{2\pi kj}{m}\,, \quad \varphi_k(2j+1) = \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,\sin\tfrac{2\pi kj}{m}\,, \tag{4}$$

$$j = 1, \ldots, \nu; \quad k \in 0 : m-1.$$

В частности,

$$\varphi_0 = \Big(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\,, \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,, 0, \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,, 0, \ldots, \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,, 0\Big)^T. \tag{5}$$

Формула (4) определяет и φ_m, причём $\varphi_m = \varphi_0$.

Легко проверить, что гармонический фрейм (4) является циклическим. Действительно,

$$\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi_k(i)\,\varphi_s(i) = \tfrac{1}{n} + \tfrac{2}{n}\sum_{j=1}^{\nu} \cos\tfrac{2\pi(k-s)j}{m}\,.$$

Видим, что скалярное произведение зависит только от разности $k - s$. Это гарантирует выполнение соотношения (1).

В данном случае для матрицы U из формулы (2) можно указать явное представление. Введём матрицу вращения

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Для неё справедливо равенство

$$B(\alpha)\,B(\beta) = B(\alpha+\beta). \tag{6}$$

Обозначим $B_j = B\big(\frac{2\pi j}{m}\big)$. Согласно (6)

$$B_j\,B_s = B_{j+s}\,. \tag{7}$$

Определим U как блочно-диагональную матрицу порядка $n = 2\nu + 1$:

$$U = \operatorname{diag}\big(1, B_1, B_2, \ldots, B_\nu\big). \tag{8}$$

Например, при $n = 5$ ($\nu = 2$)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B_1}} & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B_2}} \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}.$$

Проверим, что для гармонического фрейма справедлива формула (2) с матрицей U вида (8). Согласно (7) имеем

$$U^k = \operatorname{diag}\bigl(1, B_1^k, B_2^k, \ldots, B_\nu^k\bigr) = \operatorname{diag}\bigl(1, B_k, B_{2k}, \ldots, B_{\nu k}\bigr).$$

Теперь равенство $U^k \varphi_0 = \varphi_k$, $k \in 0 : m-1$, следует из (5) и (4).

3°. Найдём собственные числа и соответствующие ортонормированные собственные векторы матрицы U вида (8).

Сначала разберёмся с матрицей $B(\alpha)$ при $\alpha \in (0, \pi)$. Её характеристический многочлен имеет вид $\lambda^2 - 2\lambda \cos\alpha + 1 = 0$. Корнями этого многочлена являются числа $\lambda_1 = e^{i\alpha}$ и $\lambda_2 = e^{-i\alpha}$. Найдём нормированный собственный вектор p_1, соответствующий собственному числу λ_1. Распишем подробно уравнение $B(\alpha)x = \lambda_1 x$, где $x = (x_1, x_2)^T$:

$$\begin{aligned} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha &= x_1\bigl(\cos\alpha + i \sin\alpha\bigr), \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha &= x_2\bigl(\cos\alpha + i \sin\alpha\bigr). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\alpha \in (0, \pi)$, получаем $x_2 = -i x_1$. Значит, $p_1 = \bigl(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\bigr)^T$. Аналогично устанавливается, что собственному числу λ_2 соответствует нормированный собственный вектор $p_2 = \bigl(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\bigr)^T$. Отметим, что векторы p_1 и p_2 не зависят от α.

Относительно матрицы B_j, $j \in 1 : \nu$, можно утверждать следующее: её собственными числами являются

$$\lambda_1 = \omega_m^j\,, \qquad \lambda_2 = \omega_m^{-j} = \omega_m^{m-j}\,;$$

соответствующие ортонормированные собственные векторы имеют вид

$$p_1 = \bigl(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{i}{\sqrt{2}}\bigr)^T, \qquad p_2 = \bigl(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{i}{\sqrt{2}}\bigr)^T.$$

Обратимся к блочно-диагональной матрице U вида (8). Нетрудно проверить, опираясь только на определения, что её собственными числами являются

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_{2j} = \omega_m^j\,, \quad \lambda_{2j+1} = \omega_m^{m-j}\,, \quad j = 1, \ldots, \nu; \tag{9}$$

соотвествующие ортонормированные собственные векторы имеют вид

$$\begin{aligned} p_1 = e_1; \quad p_{2j} &= \bigl(0, \ldots, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{i}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\bigr)^T, \\ p_{2j+1} &= \bigl(0, \ldots, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{i}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\bigr)^T, \quad j = 1, \ldots, \nu, \end{aligned} \tag{10}$$

где индексы ненулевых компонент равны $2j$ и $2j+1$.

Собственные числа (9) суть корни степени m из единицы. Они попарно различны. Это следует из условий $n = 2\nu + 1$ и $n \leqslant m$, согласно которым при $j \in 1 : \nu$ выполняются неравенства

$$j \leqslant \nu = \tfrac{n-1}{2} \leqslant \tfrac{m-1}{2} < \tfrac{m}{2} \quad \text{и} \quad m - j > \tfrac{m}{2}\,.$$

Таким образом, подтверждена справедливость условия (i) предложения 1. Справедливость условия (ii) проверяется непосредственно.

4°. Следующее утверждение даёт способ построения других циклических фреймов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $n = 2\nu + 1$, матрица U имеет вид (8) и φ_0 — вектор из $\mathbb{R}^n$, у которого*

$$\bigl[\varphi_0(1)\bigr]^2 = \tfrac{1}{n}\,; \qquad \bigl[\varphi_0(2j)\bigr]^2 + \bigl[\varphi_0(2j+1)\bigr]^2 = \tfrac{2}{n}\,, \quad j = 1, \ldots, \nu. \tag{11}$$

Тогда векторы $\varphi_k = U^k \varphi_0$, $k \in 0 : m-1$, образуют циклический фрейм.

Доказательство. Воспользуемся предложением 1. В данном случае достаточно проверить только выполнение условия (ii). Это сделать просто. Действительно, согласно (10) и (11)

$$\begin{aligned}
&\bigl|\langle \varphi_0, p_1 \rangle\bigr| = \bigl|\varphi_0(1)\bigr| = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\\
&\bigl|\langle \varphi_0, p_{2j} \rangle\bigr|^2 = \bigl|\varphi_0(2j)\,\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\,\varphi_0(2j+1)\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\bigr|^2 =\\
&\qquad\qquad = \tfrac{1}{2}\bigl([\varphi_0(2j)]^2 + [\varphi_0(2j+1)]^2\bigr) = \tfrac{1}{n}\,,\\
&\bigl|\langle \varphi_0, p_{2j+1} \rangle\bigr|^2 = \bigl|\varphi_0(2j)\,\tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\,\varphi_0(2j+1)\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\bigr|^2 = \tfrac{1}{n}\,,
\end{aligned}$$

что равносильно требуемому. □

5°. Укажем некоторое обобщение конструкции матрицы U.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $n = 2\nu + 1$ и*

$$U = \mathrm{diag}\bigl(1, B_{r(1)}, B_{r(2)}, \ldots, B_{r(\nu)}\bigr), \tag{12}$$

где попарно различные натуральные числа $r(j)$ удовлетворяют неравенству

$$r(j) < \tfrac{m}{2}\,, \qquad j \in 1 : \nu. \tag{13}$$

Если для начального вектора $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие (11), то векторы $\varphi_k = U^k \varphi_0$, $k \in 0 : m-1$, образуют циклический фрейм.

Доказательство. Собственными числами матрицы U вида (12) являются

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_{2j} = \omega_m^{r(j)}, \quad \lambda_{2j+1} = \omega_m^{m-r(j)}, \quad j = 1, \ldots, \nu. \tag{14}$$

Им соответствуют ортонормированные собственные векторы (10).

Собственные числа (14) попарно различны, поскольку наряду с (13) справедливо эквивалентное неравенство $m - r(j) > \frac{m}{2}$, $j \in 1 : \nu$. Значит, выполняется условие (i) предложения 1. Выполнение условия (ii) проверяется так же, как в предложении 2. □

6°. Рассмотрим случай чётного n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $n = 2\nu$ и*

$$U = \operatorname{diag}\big(B_{r(1)}, \ldots, B_{r(\nu)}\big),$$

где, как и раньше, натуральные числа $r(j)$ попарно различны и удовлетворяют неравенству (13). *Если для компонент начального вектора $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие*

$$\big[\varphi_0(2j-1)\big]^2 + \big[\varphi_0(2j)\big]^2 = \tfrac{2}{n}, \quad j = 1, \ldots, \nu,$$

то векторы $\varphi_k = U^k \varphi_0$, $k \in 0 : m-1$, образуют циклический фрейм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Циклические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 января 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0121`).

2. Дурягин А. М., Соловьёва Н. А. *Вещественные гармонические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 9 октября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#1009`).