ОЦЕНКИ ДЕЛЬСАРТА ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА ЭЛЕМЕНТОВ СФЕРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА*

Р. Е. Афонин — Snedekorr@gmail.com
В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru
А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

20 марта 2010 г.

Аннотация

Приводится доказательство теоремы Дельсарта для оценки снизу количества элементов сферического дизайна. Дан вывод оценок Дельсарта для количества элементов сферического дизайна.

1°. **Основная теорема.** Используем стандартное скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ векторов x, $y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Пусть

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Считаем, что $n \geqslant 3$.

В работах [1, 2] введено понятие сферического дизайна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть t — натуральное число. Система единичных векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ называется сферическим t-дизайном, если выполняется равенство

$$\frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} P(x)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i)$$

для всех полиномов $P(x)$ степени не выше t. Здесь σ_n — площадь сферы S^{n-1}.

По мнению авторов [3] наиболее интересная задача теории дизайнов такова: для данных n, t найти сферический t-дизайн с минимальным числом элементов. Важная оценка снизу для $m = |\Phi|$ получена Ф. Дельсартом [1, 2].

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ *— сферический* t*-дизайн. Тогда*

$$m \geqslant C_{n+s-1}^{n-1} + C_{n+s-2}^{n-1} \quad \textit{при } t = 2s, \tag{1}$$

$$m \geqslant 2\, C_{n+s-1}^{n-1} \qquad \textit{при } t = 2s+1. \tag{2}$$

2°. **Полиномы Гегенбауэра.** Для доказательства теоремы 1 нам потребуются полиномы Гегенбауэра $P_k^{(\alpha,\alpha)}(x)$ степени k, ортогональные с весом $w(x) = (1-x^2)^\alpha$ на отрезке $[-1,1]$, при $\alpha = (n-3)/2$. Обычно используется следующая нормировка [4]:

$$P_k^{(\alpha,\alpha)}(1) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(k+1)}.$$

Известна формула для квадрата нормы полиномов Гегенбауэра

$$\big\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\big\|^2 := \int\limits_{-1}^{1} w(x)\,\big[P_k^{(\alpha,\alpha)}(x)\big]^2\,dx =$$

$$= \frac{2^{2\alpha+1}\,\Gamma^2(k+\alpha+1)}{(2k+2\alpha+1)\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+2\alpha+1)}.$$

Ещё раз подчеркнём, что нас интересует специальное значение параметра α:

$$\alpha = \frac{n-3}{2}.$$

Изменим нормировку полиномов Гегенбауэра. Положим

$$Q_k(x) = c_k\,P_k^{(\alpha,\alpha)}(x),$$

где константа c_k выбирается так, чтобы

$$Q_k(1) = \big\|Q_k\big\|^2. \tag{3}$$

Перепишем равенство (3) в виде $P_k^{(\alpha,\alpha)}(1) = c_k\,\big\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\big\|^2$. Отсюда следует, что $c_k = P_k^{(\alpha,\alpha)}(1)\,/\,\big\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\big\|^2$ и

$$Q_k(1) = \frac{\big[P_k^{(\alpha,\alpha)}(1)\big]^2}{\big\|P_k^{(\alpha,\alpha)}\big\|^2}.$$

С учётом выписанных формул придём к равенству

$$\|Q_k\|^2 = \frac{(2k+n-2)\,\Gamma(k+n-2)}{\Gamma^2\big(\frac{n-1}{2}\big)\,k!\,2^{n-2}}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{4}$$

Полином $Q_0(x)$ равен постоянной Q_0. При $k=0$ из (3) и (4) получаем

$$Q_0 = \|Q_0\|^2 = \frac{(n-2)!}{\Gamma^2\big(\frac{n-1}{2}\big)\,2^{n-2}}. \tag{5}$$

3°. Зональные сферические функции. Возьмём вектор $v \in S^{n-1}$. Функция $f(x) = Q_k\big(\langle v, x\rangle\big)$, рассматриваемая на сфере S^{n-1}, называется зональной сферической функцией.

ЛЕММА 1. *Пусть $k \geqslant 1$. Для любого $v \in S^{n-1}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{S^{n-1}} Q_k\big(\langle v, x\rangle\big)\, dS_x = 0.$$

Доказательство. Интеграл обозначим I_k. При k нечётном функция $f(x) = Q_k\big(\langle v, x\rangle\big)$ является нечётной на $\mathbb{R}^n$, поэтому $I_k = 0$.

Пусть k чётное, $k \geqslant 2$. Тогда Q_k содержит только чётные степени:

$$Q_k(u) = \sum_{i=0,2,\dots,k} a(i)\, u^i.$$

Отсюда

$$I_k = \sum_{i=0,2,\dots,k} a(i) \int\limits_{S^{n-1}} \big[\langle v, x\rangle\big]^i\, dS_x = \sigma_n \sum_{i=0,2,\dots,k} a(i)\, c(i). \tag{6}$$

Интеграл из (6) вычислен в докладе [5]. Он равен $\sigma_n\, c(i)$, где

$$c(0) = 1; \qquad c(i) = \frac{(i-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+i-2)}, \quad i \geqslant 2.$$

Запишем условие ортогональности:

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_k(u)(1-u^2)^\alpha\, du = \sum_{i=0,2,\dots,k} a(i)\, d(i) = 0, \tag{7}$$

где

$$d(i) = \int\limits_{-1}^{1} u^i (1-u^2)^\alpha\, du = 2\int\limits_{0}^{1} u^i (1-u^2)^\alpha\, du.$$

Вычислим последний интеграл. После замены $x = u^2$, $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ получим

$$d(i) = \int\limits_{0}^{1} x^{(i-1)/2}(1-x)^\alpha\, dx = \frac{\Gamma\big(\frac{i+1}{2}\big)\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\big(\frac{i+1}{2}+\alpha+1\big)}.$$

Положим теперь $\alpha = (n-3)/2$. Тогда последовательность $\big\{d(i)\big\}$ чудесным образом станет пропорциональной последовательности $\big\{c(i)\big\}$. Действительно, при $\alpha = (n-3)/2$

$$d(i) = \frac{\Gamma\big(\frac{i+1}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{i+n}{2}\big)}.$$

У нас i — чётное, $i = 2\nu$. Применив ν раз формулу $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, получим

$$\Gamma\Big(\frac{i+1}{2}\Big) = \Gamma\Big(\nu + \frac{1}{2}\Big) = (2\nu-1)!!\,\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{2^\nu},$$

$$\Gamma\Big(\frac{i+n}{2}\Big) = \Gamma\Big(\nu + \frac{n}{2}\Big) = n\,(n+2)\cdots(n+i-2)\,\frac{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}{2^\nu},$$

$$d(i) = \frac{(i-1)!!}{n\,(n+2)\cdots(n+i-2)}\cdot\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}.$$

В результате

$$d(i) = c(i)\,K(n), \qquad i = 0, 2, \ldots, k, \tag{8}$$

где $K(n)$ зависит только от n. (При $i = 0$ проверяется непосредственно.)

Окончательно в силу (6), (7), (8) интеграл I_k равен нулю. Действительно,

$$I_k = \sigma_n \sum_{i=0,2,\ldots,k} a(i)\,c(i) = \frac{\sigma_n}{K(n)} \sum_{i=0,2,\ldots,k} a(i)\,d(i) = 0.$$

Лемма доказана. □

4°. Необходимое условие сферического дизайна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ — сферический t-дизайн. Тогда выполняются равенства*

$$\sum_{i,j=1}^{m} Q_k\big(\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle\big) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, t. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} Q_k\big(\langle\varphi_i, x\rangle\big), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

является алгебраическим полиномом степени не выше k. По определению сферического t-дизайна и лемме 1

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} P(\varphi_j) = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} P(x)\,dS = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{S^{n-1}} Q_k\big(\langle\varphi_i, x\rangle\big)\,dS = 0,$$

что равносильно (9). □

З а м е ч а н и е. Условие (9) является и достаточным условием сферического t-дизайна — см. статью В. А. Юдина [6].

5°. Оценка количества элементов сферического дизайна по теореме Дельсарта. Ф. Дельсарт [1, 2] предложил замечательный метод оценивания количества элементов сферического t-дизайна.

Определим $\mathscr{P}_t^+$ как множество полиномов степени не выше t, удовлетворяющих условиям

$$F(u) \geqslant 0 \text{ на } [-1,1]; \qquad F(1) = 1.$$

Каждый полином $F \in \mathscr{P}_t^+$ можно разложить по полиномам Гегенбауэра

$$F(u) = \sum_{k=0}^{t} F_k \, Q_k(u).$$

Для коэффициентов Фурье F_k справедлива формула

$$F_k = \frac{(F, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}, \quad k \in 0 : t,$$

где $(\ \ ,\ \ )$ — скалярное произведение в $L_2[-1,1]$ с весом

$$w_n(u) = (1-u^2)^{(n-3)/2}.$$

Поскольку $Q_0 = \|Q_0\|^2$, то

$$F_0 = \int_{-1}^{1} F(u) \, w_n(u) \, du > 0. \tag{10}$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ — сферический t-дизайн, то*

$$m \geqslant \sup_{F \in \mathscr{P}_t^+} \frac{1}{F_0 \, Q_0}. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F \in \mathscr{P}_t^+$. Положим $S = \sum\limits_{i,j=1}^{m} F\big(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big)$. Имеем

$$S \geqslant \sum_{i=1}^{m} F\big(\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle\big) = m \, F(1) = m. \tag{12}$$

Вместе с тем, в силу (9)

$$S = \sum_{k=0}^{t} F_k \sum_{i,j=1}^{m} Q_k\big(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big) = m^2 \, F_0 \, Q_0. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует неравенство $m \geqslant 1/(F_0 \, Q_0)$.

Теорема доказана. □

6°. Оценка в случае чётного t. Получим для правой части неравенства (11) оценку снизу. Сначала рассмотрим случай $t = 2s$. Обозначим через $\mathscr{R}_{2s}$ подмножество $\mathscr{P}_t^+$, состоящее из полиномов $F(u)$ вида $F(u) = [A(u)]^2$, где

$$A(u) = \sum_{k=0}^{s} a_k\, Q_k(u), \quad A(1) = 1. \tag{14}$$

ЛЕММА 2. *Экстремальная задача*

$$b_{2s}(F) := \frac{1}{F_0} \to \sup_{F \in \mathscr{R}_{2s}}$$

имеет единственное решение

$$F^*(u) = \left[\frac{1}{L_t} \sum_{k=0}^{s} Q_k(u)\right]^2,$$

где $L_t = \sum\limits_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2$. *При этом* $b_{2s}(F^*) = L_t$.

Доказательство. Для полинома $F(u) = [A(u)]^2$ в силу (14), нормировки Q_k и неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\begin{aligned} 1 = F(1) = \left[\sum_{k=0}^{s} a_k\, Q_k(1)\right]^2 = \left[\sum_{k=0}^{s} a_k\, \|Q_k\|^2\right]^2 = \\ = \left[\sum_{k=0}^{s} \big(a_k\, \|Q_k\|\big) \|Q_k\|\right]^2 \leqslant \sum_{k=0}^{s} a_k^2\, \|Q_k\|^2 \sum_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Неравенство обращается в равенство только тогда, когда $a_k\, \|Q_k\| = \lambda\, \|Q_k\|$ при некотором λ и всех $k \in 0 : s$, т.е. когда

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_s = \lambda. \tag{16}$$

Далее по формуле (10)

$$F_0 = \int_{-1}^{1} \left[\sum_{k=0}^{s} a_k\, Q_k(u)\right]^2 w_n(u)\, du.$$

В силу ортогональности

$$F_0 = \sum_{k=0}^{s} a_k^2\, \|Q_k\|^2. \tag{17}$$

Из (17) и (15) следует, что

$$\frac{1}{F_0} \leqslant \sum_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2 = L_t.$$

Равенство достигается только при выполнении условия (16), что вместе с равенством $A(1) = 1$ приводит к формуле $\lambda = 1/L_t$. Остаётся отметить, что в силу (17)

$$b_{2s}(F^*) = \frac{1}{F_0^*} = L_t.$$

Лемма доказана. □

На основании (11) и леммы 2 заключаем, что при $t = 2s$ для количества элементов сферического t-дизайна справедливо неравенство $m \geqslant b_D(n, 2s)$, где

$$b_D(n, 2s) = \frac{1}{Q_0} \sum_{k=0}^{s} \|Q_k\|^2. \tag{18}$$

7°. Оценка в случае нечётного t**.** Обратимся к случаю $t = 2s + 1$. Обозначим $\mathscr{R}_{2s+1}$ подмножество $\mathscr{P}_t^+$, состоящее из полиномов $F(u)$ вида $F(u) = (1 + u)[A(u)]^2$, где

$$A(u) = \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}\, Q_{s-2k}(u), \quad A(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Полиномы Q_{s-2k} имеют одинаковую чётность. Аналогично (15) получаем

$$\begin{aligned} 1 = F(1) = 2\left[\sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}\, Q_{s-2k}(1)\right]^2 \leqslant \\ \leqslant 2 \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}^2 \|Q_{s-2k}\|^2 \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \|Q_{s-2k}\|^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Равенство достигается только, когда все a_{s-2k} равны между собой. Их общее значение обозначим λ. Из условия $A(1) = 1/\sqrt{2}$ следует, что $\lambda = \sqrt{2}/L_t$, где

$$L_t = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \|Q_{s-2k}\|^2.$$

Далее по формуле (10)

$$F_0 = \int_{-1}^{1} (1+u)\,[A(u)]^2\, w_n(u)\, du = \\ = \int_{-1}^{1} [A(u)]^2\, w_n(u)\, du = \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2k}^2\, \|Q_{s-2k}\|^2. \tag{20}$$

Согласно (19)

$$\frac{1}{F_0} \leqslant L_t.$$

Равенство достигается на полиноме

$$F^*(u) = (1+u)\,\frac{2}{L_t^2}\left[\sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} Q_{s-2k}(u)\right]^2.$$

При этом согласно (20)

$$b_{2s+1}(F^*) := \frac{1}{F_0^*} = L_t.$$

Для количества элементов сферического t-дизайна по теореме 2 получаем неравенство $m \geqslant b_D(n, 2s+1)$, где

$$b_D(n, 2s+1) = \frac{2}{Q_0} \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \|Q_{s-2k}\|^2. \tag{21}$$

Нижние границы $b_D(n, 2s)$ и $b_D(n, 2s+1)$ называются оценками Дельсарта (Delsarte bounds).

8°. Вычисление границы Дельсарта $b_D(n,t)$. С учетом формулы (5) перепишем формулу (4) в виде

$$\|Q_k\|^2 = \frac{(2k+n-2)\,\Gamma(k+n-2)}{2^{n-2}\,\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right) k!} = \\ = Q_0\,\frac{(2k+n-2)\,\Gamma(k+n-2)}{(n-2)!\,k!} = \\ = Q_0\,\frac{\big(k+(k+n-2)\big)\,(k+n-3)!}{(n-2)!\,k!} = \\ = Q_0\left(\frac{(k+n-3)!}{(n-2)!\,(k-1)!} + \frac{(k+n-2)!}{(n-2)!\,k!}\right) = \\ = Q_0\left(C_{k+n-3}^{k-1} + C_{k+n-2}^{k}\right). \tag{22}$$

При $k=0$ считаем, что $C_{n-3}^{-1}=0$.

Вычислим теперь величину (18). Согласно (22)

$$b_D(n,2s)=\frac{1}{Q_0}\sum_{k=0}^{s}\|Q_k\|^2=\sum_{k=0}^{s}\bigl(C_{k+n-3}^{k-1}+C_{k+n-2}^{k}\bigr). \tag{23}$$

Последовательным применением равенства $C_m^s=C_{m-1}^s+C_{m-1}^{s-1}$ получаем

$$C_m^s=C_{m-1}^s+C_{m-2}^{s-1}+C_{m-3}^{s-2}+\ldots+C_{m-s-1}^0=\sum_{k=0}^{s}C_{m-s-1+k}^k$$

(учли, что $C_{m-s}^0=1=C_{m-s-1}^0$). В частности,

$$\sum_{k=0}^{s}C_{k+n-2}^k=C_{n+s-1}^s=C_{n+s-1}^{n-1}\,, \tag{24}$$

$$\sum_{k=0}^{s}C_{k+n-3}^{k-1}=\sum_{k=1}^{s}C_{k+n-3}^{k-1}=\sum_{k=0}^{s-1}C_{k+n-2}^{k}=C_{n+s-2}^{n-1}\,.$$

Отсюда и из (23) следует равенство

$$b_D(n,2s)=C_{n+s-1}^{n-1}+C_{n+s-2}^{n-1}\,,$$

что доказывает оценку (1).

Вычислим теперь величину (21):

$$b_D(n,2s+1)=\frac{2}{Q_0}\sum_{j=0}^{\lfloor s/2\rfloor}\|Q_{s-2j}\|^2=2\sum_{j=0}^{\lfloor s/2\rfloor}\bigl(C_{s-2j+n-3}^{s-2j-1}+C_{s-2j+n-2}^{s-2j}\bigr). \tag{25}$$

Рассмотрим два случая. Пусть $s=2l$. Тогда $\lfloor s/2\rfloor=l$ и в силу (24)

$$b_D(n,2s+1)=2\bigl[C_{s+n-2}^s+C_{s+n-3}^{s-1}+C_{s+n-4}^{s-2}+\ldots+C_{n-2}^0\bigr]=2\,C_{n+s-1}^{n-1}.$$

Если же $s=2l+1$, то из формулы (25) получим ровно тот же результат:

$$b_D(n,2s+1)=2\,C_{n+s-1}^{n-1}\,.$$

Это доказывает оценку (2).

ПРИМЕР. При $n=3$, $s=2$, $t=2s+1$ получим

$$b_D(3,5)=2\,C_4^2=12.$$

В то же время набор из 12 вершин икосаэдра, вписанного в сферу S^2, является сферическим дизайном 5-го порядка. Значит, это минимальный сферический дизайн порядка 5 в $\mathbb{R}^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Delsarte. *An algebraic approach to the association schemes of coding theory* // Philips Res. Reports Suppl. 1973. N. 10. P. 1–97.

2. Ph. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel. *Spherical codes and designs* // Geometricae Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

3. E. Bannai, A. Munemasa, B. Venkov. *The nonexistence of certain tight spherical designes* // Алгебра и анализ. 2004. Т. 10. Вып. 4. С. 1–23.

4. Г. Сегё. *Ортогональные многочлены.* М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.

5. Р. Е. Афонин, В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный. *Интегрирование по сфере в n-мерном пространстве* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 мая 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0515`)

6. В. А. Юдин. *Вращения сферических дизайнов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. Вып. 3. С. 39–45.