# ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ГИЛЬБЕРТА-СОНИНА*

Р. Е. Афонин — Snedekorr@gmail.com

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru

4 сентября 2010 г.

**1**°. Пусть $S^{n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$. Интеграл

$$H_k(v) \;=\; \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} \big[\langle v, x\rangle\big]^k \, dS,$$

где $\sigma_n$ — площадь $S^{n-1}$, называется интегралом Гильберта-Сонина.

**ТЕОРЕМА.** *При целых неотрицательных $k$ и $v \in S^{n-1}$ справедлива формула*

$$H_k(v) = \begin{cases} c_k, & \text{если } k \text{ чётное, } k = 2s; \\ 0, & \text{если } k \text{ нечётное,} \end{cases} \tag{1}$$

*где $c_0 = 1$ и*

$$c_{2s} = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{2j+1}{2j+n}\,, \qquad s = 1, 2, \ldots\,.$$

Доказательство этой теоремы с помощью ортогональной замены переменных в интеграле по сфере $S^{n-1}$ приведено в [1]. Данный доклад посвящён непосредственному выводу формулы (1).

**2**°. Нам потребуется интеграл Дирихле

$$J(k_1, k_2, \ldots, k_n) \;=\; \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} x_1^{k_1}\, x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \, dS.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

**ЛЕММА.** *Пусть* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *— целые неотрицательные числа и* $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. *Тогда*

$$J(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \begin{cases} \dfrac{(k_1-1)!!\,(k_2-1)!!\,\cdots\,(k_n-1)!!}{n(n+2)(n+4)\cdots(n+k-2)}\,, & \text{когда все } k_i \text{ чётные,} \\ 0, & \text{когда хотя бы одно } k_i \text{ нечётное.} \end{cases}$$

(*Здесь по определению* $(-1)!! = 1$.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой (см. [1])

$$\int\limits_{S^{n-1}} f(x)\,dS \;=\; \int\limits_{D^{n-1}} f\big(\mathbf{\Phi}_n(\varphi)\big)\, I_n(\varphi)\,d\varphi, \tag{2}$$

где $D^{n-1} = \big\{\varphi \in \mathbb{R}^{n-1} \;\big|\; \varphi_k \in [0,\pi],\ k \in 1:n-2;\ \varphi_{n-1} \in [0, 2\pi]\big\}$,

$$I_n(\varphi) = \sin^{n-2}\varphi_1\, \sin^{n-3}\varphi_2\, \cdots\, \sin\varphi_{n-2}$$

и отображение $x = \mathbf{\Phi}_n(\varphi)$ определяется так:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\varphi_1\,, \\ x_2 &= \sin\varphi_1\, \cos\varphi_2\,, \\ x_3 &= \sin\varphi_1\, \sin\varphi_2\, \cos\varphi_3\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \sin\varphi_1\, \sin\varphi_2\, \cdots\, \sin\varphi_{n-2}\, \cos\varphi_{n-1}\,, \\ x_n &= \sin\varphi_1\, \sin\varphi_2\, \cdots\, \sin\varphi_{n-2}\, \sin\varphi_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Согласно (2) имеем

$$J(k_1, k_2, \ldots, k_n) =$$
$$= \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_0^{\pi} \cos^{k_1}\varphi_1\, \sin^{k-k_1+n-2}\varphi_1\,d\varphi_1 \int\limits_0^{\pi} \cos^{k_2}\varphi_2\, \sin^{k-k_1-k_2+n-3}\varphi_2\,d\varphi_2\, \cdots$$
$$\cdots \int\limits_0^{\pi} \cos^{k_{n-2}}\varphi_{n-2}\, \sin^{k_{n-1}+k_n+1}\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2} \int\limits_0^{2\pi} \cos^{k_{n-1}}\varphi_{n-1}\, \sin^{k_n}\varphi_{n-1}\,d\varphi_{n-1}\,. \tag{3}$$

Сначала покажем, что $J(k_1, k_2, \ldots, k_n) = 0$, когда одно из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, скажем, $k_i$, нечётно. Для этого рассмотрим три случая.

Пусть $i \in 1:n-2$. Выделим $i$-й интеграл в произведении (3):

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^{k_i}\varphi_i\, \sin^{m_i}\varphi_i\,d\varphi_i\,, \tag{4}$$

где $m_i = k - k_1 - \dots - k_i + n - i - 1$. Сделав замену $\psi_i = \pi - \varphi_i$, в силу нечётности $k_i$ получим

$$\int_0^\pi \cos^{k_i} \varphi_i \, \sin^{m_i} \varphi_i \, d\varphi_i \, = \, - \int_0^\pi \cos^{k_i} \psi_i \, \sin^{m_i} \psi_i \, d\psi_i \, ,$$

так что интеграл (4) равен нулю. Как следствие, и всё произведение из правой части (3) равно нулю, т. е. $J(k_1, k_2, \dots, k_n) = 0$.

Разберём далее случаи, когда $i = n - 1$ или $i = n$. Выделим последний интеграл из произведения (3):

$$\int_0^{2\pi} \cos^{k_{n-1}} \varphi_{n-1} \, \sin^{k_n} \varphi_{n-1} \, d\varphi_{n-1} \, .$$

Сделав замену $\psi_{n-1} = \pi - \varphi_{n-1}$, получим

$$\int_0^{2\pi} \cos^{k_{n-1}} \varphi_{n-1} \, \sin^{k_n} \varphi_{n-1} \, d\varphi_{n-1} = \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos\psi_{n-1})^{k_{n-1}} \, \sin^{k_n} \psi_{n-1} \, d\psi_{n-1} \, .$$

Если $i = n$, т. е. $k_n$ нечётно, то подинтегральная функция будет нечётной. Поэтому, в силу симметричности интервала $[-\pi, \pi]$, последний интеграл, а вместе с ним и произведение (3), равны нулю.

Наконец, рассмотрим случай, когда $k_n$ чётно, а $k_{n-1}$ нечётно. На этот раз подинтегральная функция будет чётной, поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} (-\cos\psi_{n-1})^{k_{n-1}} \, \sin^{k_n} \psi_{n-1} \, d\psi_{n-1} = -2 \int_0^{\pi} \cos^{k_{n-1}} \psi_{n-1} \, \sin^{k_n} \psi_{n-1} \, d\psi_{n-1} \, .$$

Так как $k_{n-1}$ нечётно, то так же, как и в случае $i \in 1 : n-2$, последний интеграл равен нулю. Значит, будет равно нулю и произведение из правой части (3).

Таким образом, во всех трёх случаях получим, что $J(k_1, \dots, k_n) = 0$.

Теперь предположим, что все числа $k_1, k_2, \dots, k_n$ чётные. Как известно,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \, \cos^q x \, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)} \, ,$$

где $\Gamma(a)$ — гамма-функция Эйлера, обладающая, в частности, следующими свойствами:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \qquad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a) \quad \text{при} \quad a > 0. \tag{5}$$

Учитывая это, при чётных $k_i$ получаем

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^{k_i}\varphi_i\,\sin^{m_i}\varphi_i\,d\varphi_i \;=\; 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{k_i}\varphi_i\,\sin^{m_i}\varphi_i\,d\varphi_i \;=\; \frac{\Gamma\bigl(\frac{k_i+1}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(\frac{m_i+1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{k_i+m_i+2}{2}\bigr)}\,.$$

Вместе с тем,

$$k_1+m_1+2=k+n; \qquad k_i+m_i+1=m_{i-1} \quad \text{при} \;\; i\in 2:n-1.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^{k_1}\varphi_1\,\sin^{m_1}\varphi_1\,d\varphi_1 = \frac{\Gamma\bigl(\frac{k_1+1}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(\frac{m_1+1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{k+n}{2}\bigr)}\,,$$

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^{k_i}\varphi_i\,\sin^{m_i}\varphi_i\,d\varphi_i = \frac{\Gamma\bigl(\frac{k_i+1}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(\frac{m_i+1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{m_{i-1}+1}{2}\bigr)} \quad \text{при} \;\; i\in 2:n-2,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^{k_{n-1}}\varphi_{n-1}\,\sin^{k_n}\varphi_{n-1}\,d\varphi_{n-1} = 2\,\frac{\Gamma\bigl(\frac{k_{n-1}+1}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(\frac{k_n+1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{m_{n-2}+1}{2}\bigr)}\,.$$

На основании (3) приходим к формуле

$$J(k_1,k_2,\ldots,k_n)=$$

$$=\frac{2}{\sigma_n}\,\frac{\Gamma\bigl(\frac{k_1+1}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(\frac{m_1+1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{k+n}{2}\bigr)}\cdot\frac{\Gamma\bigl(\frac{k_2+1}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(\frac{m_2+1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{m_1+1}{2}\bigr)}\;\cdots$$

$$\cdots\,\frac{\Gamma\bigl(\frac{k_{n-2}+1}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(\frac{m_{n-2}+1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{m_{n-3}+1}{2}\bigr)}\cdot\frac{\Gamma\bigl(\frac{k_{n-1}+1}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(\frac{k_n+1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{m_{n-2}+1}{2}\bigr)}=$$

$$=\frac{2}{\sigma_n\,\Gamma\bigl(\frac{k+n}{2}\bigr)}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\bigl(\tfrac{k_i+1}{2}\bigr). \tag{6}$$

В частности, при $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

$$1=\frac{2\,\pi^{n/2}}{\sigma_n\,\Gamma\bigl(\frac{n}{2}\bigr)}\,,$$

так что

$$\sigma_n=2\,\pi^{n/2}/\Gamma\bigl(\tfrac{n}{2}\bigr).$$

Подставив это в (6), получим

$$J(k_1,k_2,\dots,k_n)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\tfrac{k_i+1}{2}\right).$$

Отметим, что в силу (5) и чётности $k_i$ и $k$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\tfrac{k_i+1}{2}\right)&=\Gamma\left(\tfrac{k_i-1}{2}+1\right)=\tfrac{k_i-1}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{k_i-1}{2}\right)=\dots=\\&=\tfrac{(k_i-1)!!}{2^{k_i/2}}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{(k_i-1)!!}{2^{k_i/2}}\sqrt{\pi},\\ \Gamma\left(\tfrac{k+n}{2}\right)&=\Gamma\left(\tfrac{k+n-2}{2}+1\right)=\tfrac{k+n-2}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{k+n-2}{2}\right)=\dots=\\&=\tfrac{(k+n-2)(k+n-4)\cdots n}{2^{k/2}}\,\Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right).\end{aligned}$$

Значит,

$$J(k_1,k_2,\dots,k_n)=\frac{(k_1-1)!!(k_2-1)!!\cdots(k_n-1)!!}{n(n+2)(n+4)\cdots(n+k-2)}\,.$$

Лемма доказана. □

**3°**. Обратимся к доказательству теоремы. Имеем

$$\big[\langle v,x\rangle\big]^k=\big[v_1\,x_1+\dots+v_n\,x_n\big]^k=\sum_{k_1+\dots+k_n=k}\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}\,\big(v_1\,x_1\big)^{k_1}\cdots\big(v_n\,x_n\big)^{k_n},$$

так что

$$H_k(v)\;=\sum_{k_1+\dots+k_n=k}\frac{k!}{(k_1)!\cdots(k_n)!}\,v_1^{k_1}\cdots v_n^{k_n}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\,dS\right\}.\qquad(7)$$

Если $k$ нечётно, то в каждом слагаемом хотя бы одно $k_i$ нечётно. В этом случае согласно лемме выражение в фигурных скобках равно нулю. Значит, и вся сумма равна нулю, т. е. $H_k(v)=0$.

Пусть теперь $k=2s, s\geqslant 1$. Слагаемые в (7), у которых хотя бы одно $k_i$ нечётно, равны нулю, поэтому

$$H_k(v)\;=\sum_{2s_1+\dots+2s_n=2s}\frac{(2s)!}{(2s_1)!\cdots(2s_n)!}\,v_1^{2s_1}\cdots v_n^{2s_n}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}}x_1^{2s_1}\cdots x_n^{2s_n}\,dS\right\}.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}\frac{(2s)!}{(2s_1)!\cdots(2s_n)!}&=\frac{(2s-1)!!\,2^s\,s!}{(2s_1-1)!!\,2^{s_1}\,s_1!\cdots(2s_n-1)!!\,2^{s_n}\,s_n!}=\\&=\frac{(2s-1)!!}{(2s_1-1)!!\cdots(2s_n-1)!!}\cdot\frac{s!}{s_1\cdots s_n!}\,.\end{aligned}$$

С учетом леммы получаем

$$H_k(v) = \frac{(2s-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+k-2)} \sum_{s_1+\cdots+s_n=s} \frac{s!}{s_1!\cdots s_n!}\,(v_1^2)^{s_1}\cdots(v_n^2)^{s_n} =$$

$$= \frac{(2s-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+k-2)}\left(v_1^2+\cdots+v_n^2\right)^s.$$

Остаётся принять во внимание, что $\|v\| = 1$ и

$$\frac{(2s-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+k-2)} = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{2j+1}{2j+n}\,.$$

Теорема доказана. □

Идея приведённого доказательства восходит к [2], п°. 676, 11.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Афонин Р. Е., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Интегрирование по сфере в n-мерном пространстве* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 мая 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0515`)

2. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Том III. М.-Л.: Физматгиз, 1960. 656 с.