

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКЕ (ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ)*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

Е. К. Чернэуцану
katerinache@yandex.ru

17 апреля 2010 г.

В докладе анализируются основные результаты известной работы [1].

1°. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы два конечных множества

$$\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=1}^m \quad \text{и} \quad \mathcal{B} = \{b_j\}_{j=1}^k.$$

Эти множества называются *строго отделимыми*, если существует вектор $v \in \mathbb{R}^n$, такой, что

$$\min_{i \in 1:m} \langle v, a_i \rangle > \max_{j \in 1:k} \langle v, b_j \rangle. \quad (1)$$

ЛЕММА 1. *Множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ строго отделимы тогда и только тогда, когда найдутся вектор $w \in \mathbb{R}^n$ и число γ со свойствами*

$$\begin{aligned} \langle w, a_i \rangle &\geq \gamma + 1 && \text{при всех } i \in 1:m, \\ \langle w, b_j \rangle &\leq \gamma - 1 && \text{при всех } j \in 1:k. \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство. То, что из (2) следует (1) с $v = w$, очевидно. Проверим обратное заключение. Обозначим

$$\begin{aligned} d &= \min_i \langle v, a_i \rangle - \max_j \langle v, b_j \rangle, \quad w = (2/d)v, \\ \gamma &= \frac{1}{2} [\min_i \langle w, a_i \rangle + \max_j \langle w, b_j \rangle]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \min_i \langle w, a_i \rangle - \max_j \langle w, b_j \rangle &= 2, \\ \min_i \langle w, a_i \rangle &= 2\gamma - \max_j \langle w, b_j \rangle = 2\gamma + (2 - \min_i \langle w, a_i \rangle), \\ \max_j \langle w, b_j \rangle &= 2\gamma - \min_i \langle w, a_i \rangle = 2\gamma - (2 + \max_j \langle w, b_j \rangle). \end{aligned}$$

Последние два соотношения равносильны (2). □

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию
«DHA & CAGD»: <http://www.dha.spb.ru/>

2°. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (-\langle w, a_i \rangle + \gamma + 1)_+ + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\langle w, b_j \rangle - \gamma + 1)_+ \rightarrow \min_{w, \gamma}. \quad (3)$$

Здесь $(u)_+ = \max\{0, u\}$. Задача (3) эквивалентна следующей задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k z_j &\rightarrow \min, \\ \langle w, a_i \rangle - \gamma + y_i &\geq 1, \quad i \in 1 : m; \\ -\langle w, b_j \rangle + \gamma + z_j &\geq 1, \quad j \in 1 : k; \\ y_i &\geq 0, \quad i \in 1 : m; \quad z_j \geq 0, \quad j \in 1 : k. \end{aligned} \quad (4)$$

Множество планов задачи (4) непусто (можно взять, например, $w = \mathbb{O}$, $\gamma = 0$, $y_i \equiv 1$, $z_j \equiv 1$) и целевая функция ограничена снизу нулём. Значит, задача (4) имеет решение. По эквивалентности и у задачи (3) существует решение.

Обозначим через μ минимальное значение целевых функций в задачах (3) и (4). Очевидно, что $\mu \geq 0$. Из определений следует такое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Равенство $\mu = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда найдутся вектор $w \in \mathbb{R}^n$ и число γ со свойствами (2).*

При выполнении соотношений (2) говорят, что гиперплоскость

$$\langle w, x \rangle = \gamma \quad (5)$$

строго разделяет множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

3°. Обратимся к случаю $\mu > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При $\mu > 0$ у задачи (3) существует решение $\{w, \gamma\}$ с $w \neq \mathbb{O}$.*

По решению задачи (3) формируется гиперплоскость (5), которая *приближённо* разделяет множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Мы будем доказывать предложение 2 с помощью эквивалентной задачи (4).

ЛЕММА 2. *Для того чтобы задача (4) имела решение с $w = \mathbb{O}$, необходимо и достаточно, чтобы совпадали средние точки множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то есть чтобы*

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k b_j. \quad (6)$$

Доказательство. Необходимость. При $w = \mathbb{O}$ целевая функция задачи (3) принимает вид

$$(1 + \gamma)_+ + (1 - \gamma)_+.$$

Её минимальное значение равно 2 и достигается при всех $\gamma \in [-1, 1]$. Значит, $\mu = 2$.

По условию задача (4) имеет решение, и мы только что установили, что минимальное значение её целевой функции равно 2. Воспользуемся критерием оптимальности для задачи линейного программирования (см., например, [2, с. 27]), согласно которому совместна система

$$\sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^k v_j = 2; \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^m u_i a_i - \sum_{j=1}^k v_j b_j = \mathbb{O}; \quad (8)$$

$$-\sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^k v_j = 0; \quad (9)$$

$$0 \leq u_i \leq \frac{1}{m}, \quad i \in 1 : m; \quad 0 \leq v_j \leq \frac{1}{k}, \quad j \in 1 : k. \quad (10)$$

Из (7) и (9) следует, что

$$\sum_{i=1}^m u_i = 1, \quad \sum_{j=1}^k v_j = 1.$$

Принимая во внимание (10), заключаем, что все u_i равны $\frac{1}{m}$ и все v_j равны $\frac{1}{k}$. Теперь формула (8) становится эквивалентной (6).

Достаточность. Запишем задачу, двойственную к (4):

$$\sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^k v_j \rightarrow \max$$

при ограничениях (8)–(10). В силу (6) набор $u_i \equiv \frac{1}{m}$, $v_j \equiv \frac{1}{k}$ является планом этой задачи. Значение целевой функции на нём равно 2.

Вместе с тем, на плане

$$w = \mathbb{O}, \quad \gamma = 0, \quad y_i \equiv 1, \quad z_j \equiv 1 \quad (11)$$

задачи (4) значение целевой функции также равно 2. Отсюда следует, что план (11) задачи (4) с $w = \mathbb{O}$ является оптимальным.

Лемма доказана. $\square$

4°. Переходим к доказательству предложения 2.

Возьмём решение задачи (4), и пусть оказалось, что у него $w = \mathbb{O}$. В этом случае $\mu = 2$ и выполняется соотношение (6). Покажем, что задача (4) имеет другое решение с $w \neq \mathbb{O}$.

Зафиксируем ненулевой вектор $h \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим систему линейных соотношений

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k z_j = -2; \\
 & \langle w, a_i \rangle - \gamma + y_i \geq 1, \quad i \in 1 : m; \\
 & -\langle w, b_j \rangle + \gamma + z_j \geq 1, \quad j \in 1 : k; \\
 & y_i \geq 0, \quad i \in 1 : m; \quad z_j \geq 0, \quad j \in 1 : k; \\
 & -\langle h, w \rangle > 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Предложение 2 будет доказано, если удастся установить, что система (12) совместна.

Допустим противное. Несовместность системы (12) означает, что у задачи линейного программирования

$$\langle h, w \rangle \rightarrow \min,$$

ограничения которой составляют условия (12) без строгого неравенства, минимальное значение целевой функции равно нулю. По критерию оптимальности для задачи линейного программирования совместна система

$$\sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^k v_j - 2\zeta = 0; \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^m u_i a_i - \sum_{j=1}^k v_j b_j = h; \tag{14}$$

$$-\sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^k v_j = 0; \tag{15}$$

$$0 \leq u_i \leq \frac{1}{m} \zeta, \quad i \in 1 : m; \quad 0 \leq v_j \leq \frac{1}{k} \zeta, \quad j \in 1 : k. \tag{16}$$

Но данная система совместна только при $h = \mathbb{O}$. Это очевидно в случае $\zeta = 0$. Если же $\zeta > 0$, то в силу (13) и (15)

$$\sum_{i=1}^m u_i = \zeta, \quad \sum_{j=1}^k v_j = \zeta.$$

На основании (16) заключаем, что $u_i \equiv \frac{1}{m} \zeta$, $v_j \equiv \frac{1}{k} \zeta$. Согласно (6) формула (14) принимает вид

$$h = \zeta \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k b_j \right) = \mathbb{O}.$$

Таким образом, система (13)–(16) совместна только при $h = \mathbb{O}$, а должна быть совместной при фиксированном ненулевом векторе h . Полученное противоречие завершает доказательство предложения 2. $\square$

Отметим, что в качестве h можно брать произвольный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$.

5°. Допустим, что мы нашли решение $\{w, \gamma\}$ задачи (3) с $w \neq \mathbb{O}$. При фиксированном w целевая функция этой задачи представляет собой выпуклую ломаную $\varphi(\gamma)$. Минимальное значение ломаной может достигаться на целом отрезке $[\gamma_*, \gamma^*]$. Чтобы определить такой отрезок, достаточно вычислить значения $\varphi(\lambda)$ в узлах $\gamma = \langle w, a_i \rangle - 1$, $i \in 1 : m$, и $\gamma = -\langle w, b_j \rangle - 1$, $j \in 1 : k$. Некоторая свобода при выборе параметра γ позволяет получить приближённое разделение множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с дополнительными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bennett K. P., Mangasarian O. L. *Robust linear programming discrimination of two linearly inseparable sets* // Optimization Methods and Software. 1992. Vol. 1. P. 23–34.
2. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.