ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО СФЕРЕ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

Р. Е. Афонин — Snedekorr@gmail.com
В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru
А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

15 мая 2010 г.

В докладе представлены базовые сведения для занятий сферическими дизайнами.

1°. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ единичную сферу S^{n-1}:

$$S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \right\}.$$

Перейдём к сферическим координатам

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos\varphi_1\,, \\
x_2 &= \sin\varphi_1\,\cos\varphi_2\,, \\
x_3 &= \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\cos\varphi_3\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\cdots\,\sin\varphi_{n-2}\,\cos\varphi_{n-1}\,, \\
x_n &= \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\cdots\,\sin\varphi_{n-2}\,\sin\varphi_{n-1}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Коротко формулы (1) можно записать так:

$$x = \mathbf{\Phi}_n(\varphi),$$

где $\mathbf{\Phi}_n = (\mathit{\Phi}_1, \ldots, \mathit{\Phi}_{n-1}, \mathit{\Phi}_n)^T$. Отметим, что

$$\mathbf{\Phi}_{n+1} = (\mathit{\Phi}_1\,, \ldots, \mathit{\Phi}_{n-1}\,, \mathit{\Phi}_n \cos\varphi_n\,, \mathit{\Phi}_n \sin\varphi_n)^T. \tag{2}$$

Считаем, что в формулах (1) точка $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ принадлежит параллелепипеду

$$D^{n-1} = \{\varphi \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \varphi_k \in [0, \pi],\ k \in 1 : n-2;\ \varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)\}.$$

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Легко проверить, что для любого $\varphi \in D^{n-1}$ точка $x = \mathbf{\Phi}_n(\varphi)$, принадлежит S^{n-1}. Тем самым формулы (1) определяют отображение $\mathbf{\Phi}_n \colon D^{n-1} \to S^{n-1}$.

С каждой точкой $x \in S^{n-1}$ свяжем величины

$$r_k = \sqrt{\sum_{i=k}^{n} x_i^2}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

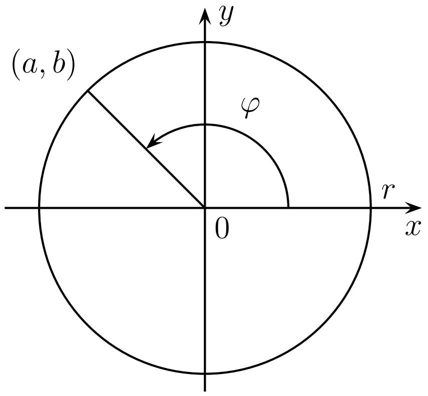
Ясно, что $r_1 = 1$ и $r_n = |x_n|$. Введём два множества

$$S_0^{n-1} = \bigl\{x \in S^{n-1} \bigm| r_k > 0 \text{ при } k \in 2 : n-1\bigr\},$$
$$D_0^{n-1} = \bigl\{\varphi \in \mathbb{R}^{n-1} \bigm| \varphi_k \in (0,\pi),\ k \in 1 : n-2;\ \varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)\bigr\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Отображение $\mathbf{\Phi}_n$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между D_0^{n-1} и S_0^{n-1}.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\varphi \in D_0^{n-1}$ и $x = \mathbf{\Phi}_n(\varphi)$, то непосредственно проверяется, что $r_{n-1} > 0$, $r_{n-2} > 0$, …, $r_2 > 0$, $r_1 = 1$, то есть что $x \in S_0^{n-1}$.

Теперь возьмём произвольную точку $x \in S_0^{n-1}$ и покажем, что существует единственный вектор $\varphi \in D_0^{n-1}$ со свойством $\mathbf{\Phi}_n(\varphi) = x$.



Воспользуемся следующим элементарным фактом. Пусть $\sqrt{a^2 + b^2} = r$, причём $r > 0$. Тогда найдётся единственный угол $\varphi \in [0, 2\pi)$, такой, что

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi. \tag{3}$$

Если и $b > 0$, то найдётся единственный угол $\varphi \in (0, \pi)$ со свойством (3). Это следует из определения синуса и косинуса (см. рисунок).

Имеем $\sqrt{x_1^2 + r_2^2} = 1$, причём $r_2 > 0$. Как было отмечено, найдётся единственный угол $\varphi_1 \in (0, \pi)$, такой, что

$$x_1 = \cos\varphi_1\,, \qquad r_2 = \sin\varphi_1\,.$$

Далее $\sqrt{x_2^2 + r_3^2} = r_2$, причём $r_2 > 0$ и $r_3 > 0$. Значит, найдётся единственный угол $\varphi_2 \in (0, \pi)$, удовлетворяющий условиям

$$x_2 = r_2\,\cos\varphi_2 = \sin\varphi_1\,\cos\varphi_2\,,$$
$$r_3 = r_2\,\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,.$$

Продолжая аналогично, дойдём до равенства $\sqrt{x_{n-2}^2 + r_{n-1}^2} = r_{n-2}$, из которого следует существование единственного угла $\varphi_{n-2} \in (0, \pi)$, такого, что

$$\begin{aligned} x_{n-2} &= r_{n-2} \cos\varphi_{n-2} = \sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-3} \cos\varphi_{n-2} \,, \\ r_{n-1} &= r_{n-2} \sin\varphi_{n-2} = \sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2} \,. \end{aligned}$$

На последнем шаге $\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2} = r_{n-1}$, где $r_{n-1} > 0$. Следовательно, существует единственный угол $\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)$ со свойством

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= r_{n-1} \cos\varphi_{n-1} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \,, \\ x_n &= r_{n-1} \sin\varphi_{n-1} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1} \,. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

2°. Будем использовать скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$. Как отмечалось, вектор-функция $x = \mathbf{\Phi}_n(\varphi)$, задаваемая формулами (1), отображает D^{n-1} в S^{n-1}.

Согласно [1] (статья «Площадь») площадь σ_n сферы S^{n-1} определяется по формуле

$$\sigma_n = \int\limits_{D^{n-1}} \sqrt{\det(G(\varphi))}\, d\varphi,$$

где $G(\varphi)$ — матрица с элементами

$$G_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{\Phi}_n}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial \mathbf{\Phi}_n}{\partial \varphi_j} \right\rangle, \qquad i, j \in 1 : n-1.$$

В общей ситуации формула для σ_n доказана в [2, с. 235].

Прокомментируем это определение. Введём n-мерные векторы

$$T_i^{(n)}(\varphi) = \frac{\partial \mathbf{\Phi}_n(\varphi)}{\partial \varphi_i}\,, \qquad i \in 1 : n-1. \tag{4}$$

Матрица G с элементами $G_{ij} = \langle T_i^{(n)}, T_j^{(n)} \rangle$, $i, j \in 1 : n-1$, есть матрица Грама системы векторов (4). Поэтому G неотрицательно определена и $\det(G) \geqslant 0$.

Интеграл от функции $f(x)$ по сфере S^{n-1} определим формулой

$$\int\limits_{S^{n-1}} f(x)\, dS = \int\limits_{D^{n-1}} f\big(\mathbf{\Phi}_n(\varphi)\big) \sqrt{\det(G(\varphi))}\, d\varphi. \tag{5}$$

Для теории сферических дизайнов вполне достаточно такого представления об интегралах по сфере.

Наша задача — вычислить функцию $I_n(\varphi) = \sqrt{\det(G(\varphi))}$. Решающую роль в этом играет ортогональность системы векторов (4).

ЛЕММА 1. *Система векторов* (4) *ортогональна для любого* $\varphi \in D^{n-1}$, *то есть*

$$\left\langle T_i^{(n)}(\varphi), T_j^{(n)}(\varphi) \right\rangle = 0 \quad \textit{при} \;\; i \neq j.$$

Доказательство. В дальнейшем аргумент φ будем опускать. Будем по индукции доказывать ортогональность системы $\{T_i^{(k)}\}_{i=1}^{k-1}$ для $k = 3, 4, \ldots, n$.

При $k = 3$

$$T_1^{(3)} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_1\,\cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_1\,\sin\varphi_2 \end{bmatrix}, \qquad T_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1\,\cos\varphi_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Легко сосчитать, что

$$\left\langle T_1^{(3)}, T_2^{(3)} \right\rangle = 0. \tag{7}$$

Вектор $T_1^{(3)}$ касателен к меридиану на сфере S^2, а $T_2^{(3)}$ — касателен к параллели. Равенство (7) отражает тот факт, что параллели и меридианы на сфере ортогональны.

Осуществим переход от k к $k+1$. По индуктивному предположению при $i, j \in 1 : k-1$, $i \neq j$, будет

$$\left\langle T_i^{(k)}, T_j^{(k)} \right\rangle := \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \varPhi_\nu}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\partial \varPhi_\nu}{\partial \varphi_j} = 0.$$

Для тех же i, j согласно (2)

$$\left\langle T_i^{(k+1)},\, T_j^{(k+1)} \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{\partial \varPhi_\nu}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\partial \varPhi_\nu}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial \varPhi_k}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\partial \varPhi_k}{\partial \varphi_j} \cdot \left(\cos^2\varphi_k + \sin^2\varphi_k\right) = 0.$$

Пусть теперь $i \in 1 : k-1$, $j = k$. Заметим, что компоненты $\varPhi_1, \ldots, \varPhi_k$ не зависят от φ_k, поэтому

$$T_k^{(k+1)} = \left(0, \ldots, 0,\, -\varPhi_k\,\sin\varphi_k\,,\, \varPhi_k\,\cos\varphi_k\right)^T. \tag{8}$$

В то же время при $i \in 1 : k-1$

$$T_i^{(k+1)} = \left(\frac{\partial \varPhi_1}{\partial \varphi_i}, \ldots, \frac{\partial \varPhi_{k-1}}{\partial \varphi_i}\,,\, \frac{\partial \varPhi_k}{\partial \varphi_i}\,\cos\varphi_k\,,\, \frac{\partial \varPhi_k}{\partial \varphi_i}\,\sin\varphi_k \right)^T. \tag{9}$$

Составив скалярное произведение векторов (8) и (9), получим 0. Индуктивный переход завершён. Лемма доказана. □

Следствием леммы является диагональность матрицы G:

$$G = \operatorname{diag}\Big(\big\|T_1^{(n)}\big\|^2, \big\|T_2^{(n)}\big\|^2, \ldots, \big\|T_{n-1}^{(n)}\big\|^2\Big).$$

Отсюда

$$I_n(\varphi) := \sqrt{\det(G)} = \big\|T_1^{(n)}\big\| \cdot \big\|T_2^{(n)}\big\| \cdots \big\|T_{n-1}^{(n)}\big\|.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любого* $n \geqslant 3$ *справедливо равенство*

$$I_n(\varphi) = \sin^{n-2}\varphi_1 \cdot \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}\,, \qquad \varphi \in D^{n-1}. \tag{10}$$

Доказательство. Будем последовательно вычислять $I_k(\varphi)$, $k = 3, \ldots, n$. При $k = 3$ векторы $T_1^{(3)}$, $T_2^{(3)}$ имеют вид (6), поэтому

$$\big\|T_1^{(3)}\big\| = 1, \qquad \big\|T_2^{(3)}\big\| = \sin\varphi_1\,, \qquad I_3(\varphi) = \sin\varphi_1\,.$$

Таким образом, элемент площади сферы S^2 равен $dS = \sin\varphi_1\, d\varphi_1\, d\varphi_2$. Это хорошо известный результат.

По индукции будем показывать, что при $k \in 3 : n$

$$\big\|T_i^{(k)}\big\|^2 = \sin^2\varphi_1 \cdot \sin^2\varphi_2 \cdots \sin^2\varphi_{i-1}\,, \qquad i \in 1 : k-1. \tag{11}$$

При $k = 3$ это выполнено. Предположим, что выполнено (11). Согласно (2)

$$\begin{aligned}\big\|T_i^{(k+1)}\big\|^2 &= \sum_{\nu=1}^{k-1}\Big(\frac{\partial\varPhi_\nu}{\partial\varphi_i}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\varPhi_k}{\partial\varphi_i}\Big)^2(\cos^2\varphi_k + \sin^2\varphi_k) = \\ &= \big\|T_i^{(k)}\big\|^2 = \sin^2\varphi_1 \cdot \sin^2\varphi_2 \cdots \sin^2\varphi_{i-1}\,, \qquad i \in 1 : k-1.\end{aligned}$$

Далее, $T_k^{(k+1)}$ имеет вид (8). Отсюда

$$\big\|T_k^{(k+1)}\big\|^2 = \varPhi_k^2\left(\sin^2\varphi_k + \cos^2\varphi_k\right) = \sin^2\varphi_1 \cdot \sin^2\varphi_2 \cdots \sin^2\varphi_{k-1}\,.$$

Индуктивный переход завершён. Формула (11) доказана для любого $k \in 3 : n$.

Полагая $k = n$, получаем

$$\big\|T_i^{(n)}\big\| = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{i-1}\,, \qquad i \in 1 : n-1.$$

(При $i = 1$ это равенство надо понимать так: $\big\|T_1^{(n)}\big\| = 1$.) Вычислим произведение по всем $i \in 1 : n-1$. Придём к равенству

$$I_n(\varphi) = \prod_{i=1}^{n-1}\big\|T_i^{(n)}\big\| = \sin^{n-2}\varphi_1 \cdot \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}\,.$$

Теорема доказана. □

Теперь можно вычислять интегралы по сфере, пользуясь формулой

$$\int\limits_{S^{n-1}} f(x)\, dS \;=\; \int\limits_{D^{n-1}} f\big(\mathbf{\Phi}_n(\varphi)\big)\, I_n(\varphi)\, d\varphi. \tag{12}$$

3°. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на S^{n-1}. Справедливо следующее интуитивно очевидное утверждение.

ЛЕММА 2. *Пусть P — ортогональная матрица размера $n \times n$. Тогда*

$$\int\limits_{S^{n-1}} f(Px)\,dS \;=\; \int\limits_{S^{n-1}} f(x)\,dS.$$

Лемму можно доказать, пользуясь связью между интегралами по сфере и шару [3].

4°. Приведём пример вычисления интеграла по сфере.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть k — неотрицательное чётное число, $k = 2s$. Тогда*

$$J(k) := \int\limits_{S^{n-1}} x_1^k\,dS = c(k)\,\sigma_n\,,$$

где $\sigma_n = 2\pi^{n/2}\,\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы S^{n-1} и

$$c(k) = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{2j+1}{2j+n}\,.$$

Доказательство. Согласно (10) и (12) имеем

$$J(k) = \int\limits_0^\pi \cos^k\varphi_1\,\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1 \int\limits_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_2\,d\varphi_2 \cdots \int\limits_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}\,.$$

Как известно,

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^p x\,\cos^q x\,dx = \frac{\Gamma\bigl(\frac{p+1}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(\frac{q+1}{2}\bigr)}{2\,\Gamma\bigl(\frac{p+q+2}{2}\bigr)}\,,$$

где $\Gamma(a)$ — гамма-функция Эйлера, обладающая, в частности, следующими свойствами:

$$\Gamma(1) = 1; \qquad \Gamma\bigl(\tfrac12\bigr) = \sqrt{\pi}; \qquad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a) \quad \text{при} \;\; a > 0. \tag{13}$$

Учитывая это, в силу чётности k получаем

$$\int\limits_0^\pi \cos^k\varphi_1\,\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1 = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^k\varphi_1\,\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1 = \frac{\Gamma\bigl(\frac{k+1}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(\frac{n-1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{k+n}{2}\bigr)}\,.$$

Далее

$$\int_0^{\pi} \sin^{n-\nu-1}\varphi_\nu\, d\varphi_\nu = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\nu+1}{2}\right)}\,, \qquad \nu = 2,\dots,n-2;$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} = 2\pi.$$

После умножения придём к формуле

$$J(k) = 2\pi\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^{n-3} = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}\,. \tag{14}$$

По определению $J(0) = \sigma_n$, так что $c(0) = 1$ и

$$\sigma_n = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^n / \,\Gamma(n/2).$$

Пусть $k \geqslant 2$. Упростим формулу (14). В силу (13)

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\tfrac{k+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\tfrac{k-1}{2}+1\right) = \tfrac{k-1}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{k-1}{2}\right) = \tfrac{k-1}{2}\,\tfrac{k-3}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{k-3}{2}\right) = \\
&= \dots = \tfrac{(k-1)(k-3)\cdots 1}{2^s}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{(k-1)!!}{2^s}\,\sqrt{\pi}, \\
\Gamma\left(\tfrac{k+n}{2}\right) &= \tfrac{k+n-2}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{k+n-2}{2}\right) = \tfrac{k+n-2}{2}\,\tfrac{k+n-4}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{k+n-4}{2}\right) = \\
&= \dots = \tfrac{(k+n-2)(k+n-4)\cdots n}{2^s}\,\Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right).
\end{aligned}$$

Значит,

$$J(k) = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^n \frac{(k-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+k-2)\,\Gamma(n/2)} = \sigma_n \prod_{j=0}^{s-1} \frac{2j+1}{2j+n}\,.$$

Предложение доказано. □

Отметим, что $J(k) = 0$ при неотрицательных нечётных k.

5°. Пусть $k_1, \dots, k_n$ — неотрицательные чётные числа и

$$\left|k\right| = k_1 + \dots + k_n\,.$$

Аналогично предыдущему, но технически чуть сложнее, вычисляется интеграл Дирихле

$$J(k_1,\dots,k_n) := \int\limits_{S^{n-1}} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\,dS =$$
$$= 2\,\frac{\Gamma\bigl(\frac{k_1+1}{2}\bigr)\cdots\Gamma\bigl(\frac{k_n+1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{|k|+n}{2}\bigr)} =$$
$$= \frac{(k_1-1)!!\cdots(k_n-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+|k|-2)}\,\sigma_n\,.$$

(По определению $(-1)!! = 1$.) Эта формула выведена также в [3] — оригинальным методом, без использования сферических координат.

Интеграл Дирихле определён при всех неотрицательных k_j, $j \in 1:n$. Если хотя бы одно из k_j нечётно, то $J(k_1,\dots,k_n) = 0$.

6°. Возьмём произвольный ненулевой вектор $v \in \mathbb{R}^n$ и чётное число k, $k \geqslant 2$. Вычислим интеграл Гильберта–Сонина

$$H(k) = \int\limits_{S^{n-1}} \bigl[\langle v, x\rangle\bigr]^k\,dS.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо равенство*

$$H(k) = \sigma_n\,c(k)\|v\|^k. \tag{15}$$

Доказательство. По лемме 2

$$H(k) = \int\limits_{S^{n-1}} \bigl[\langle v, Px\rangle\bigr]^k\,dS, \tag{16}$$

где P — любая ортогональная матрица. Положим $v_0 = v/\|v\|$ и построим ортогональную матрицу P, такую, что $P^T v_0 = e_1$. В этом случае

$$\langle v, Px\rangle = \langle P^T v, x\rangle = \|v\|\langle P^T v_0, x\rangle = \|v\|\langle e_1, x\rangle = \|v\|x_1\,.$$

Теперь (15) следует из (16) и предложения 1.

Поясним, как строится матрица P. Условие $P^T v_0 = e_1$ равносильно условию $Pe_1 = v_0$. Значит, в качестве первого столбца матрицы P нужно взять единичный вектор v_0. Остальные $n-1$ столбцов выбираются произвольно, но так, чтобы система, состоящая из n столбцов матрицы P, образовывала ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$. $\square$

Отметим, что $H(k) = 0$ при неотрицательных нечётных k.

Предложение 2 может быть доказано непосредственно, без использования леммы 2, опираясь только на формулу для интеграла Дирихле (см. [4], п°. **676**, 11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическая энциклопедия. Т. 4. М., 1984.

2. Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов. *Курс метрической геометрии.* М.–Ижевск: ИКИ, 2004.

3. J. A. Baker. *Integration over spheres and the divergence theorem for balls* // Amer. Math. Monthly. 1997. V. 104. No. 1. P. 36–47.

4. Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Том III. М., 1960.