ФАКТОРИЗАЦИЯ ГУДА МАТРИЦЫ ФУРЬЕ*

В. Н. Малозёмов — malv@gamma.math.spbu.ru

О. В. Просеков — sc2@pisem.net

5 мая 2004 г.

С современных позиций рассматривается вопрос о факторизации матрицы Фурье, порядок которой равен произведению попарно взаимно простых чисел [1]. Используется обозначение

$$\langle k\rangle_n = k - \lfloor k/n\rfloor\, n\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

1°. Пусть m, n — взаимно простые натуральные числа. Введём две квадратные матрицы порядка mn:

$$Q_{mn}^{(n)}[k, k_1\, n + k_2] = \begin{cases} 1\,, & \text{если } k_1 = \langle k\rangle_m \text{ и } k_2 = \langle k\rangle_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$P_{mn}^{(n)}[l, l_1\, n + l_2] = \begin{cases} 1\,, & \text{если } l = \langle l_1\, n + l_2\, m\rangle_{mn}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $k, l\in 0 : mn-1$, $k_1, l_1\in 0 : m-1$, $k_2, l_2\in 0 : n-1$. Матрица $Q_{mn}^{(n)}$ заполняется по строкам, а матрица $P_{mn}^{(n)}$ — по столбцам. Например, при $m = 2$, $n = 3$ имеем

$$Q_6^{(3)} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad P_6^{(3)} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}.$$

Данные для построения этих матриц приведены в таблицах 1 и 2 соответственно.

---

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Таблица 1:

k	$k_1 = \langle k \rangle_2$	$k_2 = \langle k \rangle_3$	$3k_1 + k_2$
0	0	0	0
1	1	1	4
2	0	2	2
3	1	0	3
4	0	1	1
5	1	2	5

Таблица 2:

l_1	l_2	$3l_1 + l_2$	$l = \langle 3l_1 + 2l_2 \rangle_6$
0	0	0	0
0	1	1	2
0	2	2	4
1	0	3	3
1	1	4	5
1	2	5	1

Отметим, что

$$Q_n^{(n)} = P_n^{(n)} = I_n\,, \qquad Q_m^{(1)} = P_m^{(1)} = I_m\,. \tag{1}$$

ЛЕММА. *При взаимно простых m и n матрицы $Q_{mn}^{(n)}$ и $P_{mn}^{(n)}$ являются матрицами перестановок.*

Доказательство. Сначала разберёмся с $Q_{mn}^{(n)}$. По построению в каждой строке этой матрицы лишь один элемент отличен от нуля (равен единице). Остаётся проверить, что если для индексов строк $k, k' \in 0 : mn-1$ выполняется равенство

$$\langle k \rangle_m\, n + \langle k \rangle_n = \langle k' \rangle_m\, n + \langle k' \rangle_n\,, \tag{2}$$

то $k = k'$. Из (2) следует, что

$$\langle k - k' \rangle_m = \big\langle \langle k \rangle_m - \langle k' \rangle_m \big\rangle_m = 0\,, \qquad \langle k - k' \rangle_n = \big\langle \langle k \rangle_n - \langle k' \rangle_n \big\rangle_n = 0\,,$$

т. е. $k - k'$ делится как на m, так и на n. По условию m и n взаимно просты, поэтому $k - k'$ делится на произведение mn. Поскольку к тому же $|k - k'| \leqslant mn-1$, то необходимо $k = k'$.

Обратимся к матрице $P_{mn}^{(n)}$. По построению в каждом столбце этой матрицы лишь один элемент отличен от нуля (равен единице). Остаётся показать, что если для индексов столбцов $l_1\, n + l_2$ и $l'_1\, n + l'_2$ с $l_1, l'_1 \in 0 : m-1$, $l_2, l'_2 \in 0 : n-1$ выполняется равенство

$$\langle l_1\, n + l_2\, m \rangle_{mn} = \langle l'_1\, n + l'_2\, m \rangle_{mn}\,, \tag{3}$$

то $l_1 = l'_1$ и $l_2 = l'_2$. Из (3) следует, что

$$(l_1 - l'_1)\, n + (l_2 - l'_2)\, m = q\, mn \tag{4}$$

при некотором целом q. Взяв вычеты по модулю m, получим $\langle (l_1 - l'_1)\, n \rangle_m = 0$. По условию n и m взаимно просты, поэтому $l_1 - l'_1$ делится на m. Поскольку к тому же $|l_1 - l'_1| \leqslant m - 1$, то необходимо $l_1 = l'_1$. Аналогично с помощью (4) и вычетов по модулю n устанавливается, что $l_2 = l'_2$. Лемма доказана. $\square$

С л е д с т в и е. Справедливы равенства

$$\big(Q_{mn}^{(n)}\big)^{-1} = \big(Q_{mn}^{(n)}\big)^{T}, \qquad \big(P_{mn}^{(n)}\big)^{-1} = \big(P_{mn}^{(n)}\big)^{T}. \tag{5}$$

2°. По-прежнему считаем, что m и n взаимно простые числа. Введём матрицу Фурье F_N с элементами

$$F_N[k,l] = \omega_N^{kl}, \qquad k,l \in 0:N-1,$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$.

ТЕОРЕМА 1. *При $N = mn$ имеет место разложение*

$$F_N = Q_{mn}^{(n)}\big(F_m \otimes F_n\big)\big(P_{mn}^{(n)}\big)^{T}. \tag{6}$$

Символ $\otimes$ обозначает кронекерово умножение матриц [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5) достаточно проверить, что

$$F_N P_{mn}^{(n)} = Q_{mn}^{(n)}\big(F_m \otimes F_n\big). \tag{7}$$

Сравним элементы с индексами $(k, l_1 n + l_2)$, $k \in 0:N-1$, $l_1 \in 0:m-1$, $l_2 \in 0:$ $:n-1$, матриц, стоящих в левой и правой частях равенства (7). Запишем

$$\big(F_N P_{mn}^{(n)}\big)[k, l_1 n + l_2] = \sum_{l=0}^{N-1} F_N[k,l] \times P_{mn}^{(n)}[l, l_1 n + l_2] =$$
$$= F_{mn}[k, \langle l_1 n + l_2 m\rangle_{mn}] = \omega_m^{kl_1}\,\omega_n^{kl_2}.$$

Вместе с тем,

$$\big(Q_{mn}^{(n)}(F_m \otimes F_n)\big)[k, l_1 n + l_2] = \sum_{k_1=0}^{m-1}\sum_{k_2=0}^{n-1} Q_{mn}^{(n)}[k, k_1 n + k_2] \times$$
$$\times \big(F_m \otimes F_n\big)[k_1 n + k_2, l_1 n + l_2] = \big(F_m \otimes F_n\big)\big[\langle k\rangle_m n + \langle k\rangle_n, l_1 n + l_2\big] =$$
$$= F_m\big[\langle k\rangle_m, l_1\big] F_n\big[\langle k\rangle_n, l_2\big] = \omega_m^{kl_1}\,\omega_n^{kl_2}.$$

Равенство (7), а с ним и теорема, доказаны. □

В силу симметричности матрицы Фурье формулу (6) можно переписать в эквивалентном виде

$$F_N = P_{mn}^{(n)}\big(F_m \otimes F_n\big)\big(Q_{mn}^{(n)}\big)^{T}.$$

3°. Теорема 1 допускает обобщение на случай, когда порядок N матрицы Фурье является произведением нескольких попарно взаимно простых чисел, т. е. $N = n_1 n_2 \dots n_s$, НОД$(n_k, n_j) = 1$ при $k \neq j$.

Обозначим $\Delta_1 = 1$, $\Delta_\nu = n_1 n_2 \dots n_{\nu-1}$ при $\nu = 2, \dots, s+1$; $N_\nu = N/\Delta_{\nu+1}$. Очевидно, что $N_0 = N$, $N_s = 1$ и $N_\nu = n_{\nu+1} \dots n_s$ при $\nu = 1, \dots, s-1$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть N равно произведению попарно взаимно простых чисел $n_1, n_2, \dots, n_s$, отличных от единицы. Тогда*

$$F_N = Q_N \big(F_{n_1} \otimes F_{n_2} \otimes \cdots \otimes F_{n_s} \big) P_N^T \,, \tag{8}$$

где

$$Q_N = \prod_{\nu=1}^{s-1} \Big(I_{\Delta_\nu} \otimes Q_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \Big) , \qquad P_N = \prod_{\nu=1}^{s-1} \Big(I_{\Delta_\nu} \otimes P_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \Big) .$$

Доказательство. При $s = 2$, когда $N = n_1 n_2$, $N_1 = n_2$, формула (8) соответствует (6) при $m = n_1$, $n = n_2$. Сделаем индукционный переход от s к $s+1$.

Возьмём $N = n_1 \dots n_s n_{s+1}$ с попарно взаимно простыми сомножителями n_ν. Взаимно простыми будут n_1 и произведение $n_2 \dots n_{s+1}$. Согласно (6), индукционному предположению и свойствам кронекерова умножения имеем

$$\begin{aligned}
F_{n_1(n_2 \dots n_{s+1})} &= Q_N^{(N_1)} \Big(F_{n_1} \otimes F_{n_2 \dots n_{s+1}} \Big) \Big(P_N^{(N_1)} \Big)^T = \\
&= Q_N^{(N_1)} \Big\{ F_{n_1} \otimes \Big[\Big(\prod_{\nu=2}^{s} \Big(I_{n_2 \dots n_{\nu-1}} \otimes Q_{n_\nu \dots n_{s+1}}^{(n_{\nu+1} \dots n_{s+1})} \Big) \Big) \Big(F_{n_2} \otimes \cdots \otimes F_{n_{s+1}} \Big) \times \\
&\qquad \times \Big(\prod_{\nu=2}^{s} \Big(I_{n_2 \dots n_{\nu-1}} \otimes P_{n_\nu \dots n_{s+1}}^{(n_{\nu+1} \dots n_{s+1})} \Big) \Big)^T \Big] \Big\} \Big(P_N^{(N_1)} \Big)^T = \\
&= Q_N^{(N_1)} \Big(\prod_{\nu=2}^{s} \Big(I_{\Delta_\nu} \otimes Q_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \Big) \Big) \Big(F_{n_1} \otimes F_{n_2} \otimes \cdots \otimes F_{n_{s+1}} \Big) \times \\
&\qquad \times \Big(\prod_{\nu=2}^{s} \Big(I_{\Delta_\nu} \otimes P_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \Big) \Big)^T \Big(P_N^{(N_1)} \Big)^T .
\end{aligned}$$

Остаётся учесть, что

$$Q_N^{(N_1)} = I_{\Delta_1} \otimes Q_{N_0}^{(N_1)} \,, \qquad P_N^{(N_1)} = I_{\Delta_1} \otimes P_{N_0}^{(N_1)} \,.$$

Теорема доказана. □

По поводу различных вариантов факторизации кронекерова произведения $F_{n_1} \otimes F_{n_2} \otimes \cdots \otimes F_{n_s}$ см. [2]

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуд И. Дж. *О взаимоотношении между двумя быстрыми преобразованиями Фурье* / В кн.: Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М. *Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов.* М.: Радио и связь, 1983. С. 136–147.

2. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Перестановки и кронекерово произведение матриц* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 31 марта 2004 г.