СТРОГАЯ h-ОТДЕЛИМОСТЬ ДВУХ МНОЖЕСТВ*

В. Н. Малозёмов malv@math.spbu.ru
Е. К. Чернэуцану katerinache@yandex.ru

18 декабря 2010 г.

В докладе обсуждается постановка задачи о строгой h-отделимости двух множеств, предложенная в [1].

1°. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ два конечных множества

$$A = \{a_i\}_{i=1}^m \quad \text{и} \quad B = \{b_j\}_{j=1}^k.$$

Следуя [1], назовём множества A и B строго h-отделимыми, если существует h пар $\{v^s, \xi_s\}_{s=1}^h$, где $v^s \in \mathbb{R}^n$ и $\xi_s \in \mathbb{R}$, таких, что

- при каждом $s \in 1:h$ выполняются неравенства

$$\langle v^s, a_i \rangle < \xi_s \quad \text{при всех } i \in 1:m;$$

- для каждого $j \in 1:k$ найдётся индекс $s \in 1:h$, на котором

$$\langle v^s, b_j \rangle > \xi_s.$$

Таким образом, речь идет о строгой отделимости множеств A и B с помощью h гиперплоскостей вида

$$H_s = \big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle v^s, x \rangle = \xi_s \big\}, \quad s \in 1:h.$$

На рис. 1 приведён пример строго 2-отделимых множеств.

Отметим, что наряду с парами $\{v^s, \xi_s\}_{s=1}^h$ строгую h-отделимость обеспечивают пары $\{\lambda v^s, \lambda \xi_s\}_{s=1}^h$ при любом $\lambda > 0$. Следующее определение строгой h-отделимости является более корректным.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

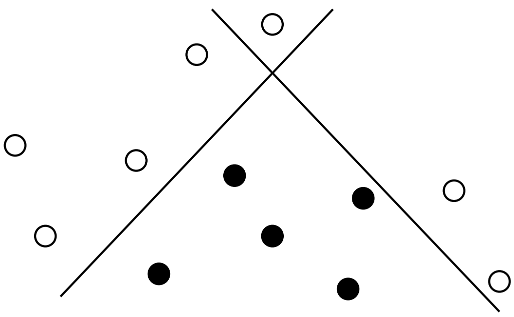

Рис. 1. Строго 2-отделимые множества

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для того чтобы множества* A *и* B *были строго* h*-отделимыми, необходимо и достаточно, чтобы существовали пары* $\{w^s, \gamma_s\}_{s=1}^h$, *такие, что*

$$\max_{s\in 1:h}\big[\langle w^s, a_i\rangle - \gamma_s + 1\big] \leqslant 0 \qquad i \in 1:m; \tag{1}$$

$$\min_{s\in 1:h}\big[-\langle w^s, b_j\rangle + \gamma_s + 1\big] \leqslant 0 \qquad j \in 1:k. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Для каждого $j \in 1:k$ введём индексное множество

$$S(j) = \big\{s \in 1:h \mid \langle v^s, b_j\rangle - \xi_s > 0\big\}.$$

Обозначим

$$\delta_1 := \min_{i\in 1:m,\ s\in 1:h}\big[-\langle v^s, a_i\rangle + \xi_s\big] > 0,$$
$$\delta_2 := \min_{j\in 1:k,\ s\in S(j)}\big[\langle v^s, b_j\rangle - \xi_s\big] > 0,$$
$$\delta := \min\{\delta_1,\ \delta_2\}.$$

Тогда

$$\delta \leqslant -\langle v^s, a_i\rangle + \xi_s, \qquad i \in 1:m, \quad s \in 1:h;$$
$$\delta \leqslant \langle v^s, b_j\rangle - \xi_s, \qquad j \in 1:k, \quad s \in S(j).$$

Положим $w^s = v^s/\delta$, $\gamma_s = \xi_s/\delta$. Получим

$$\langle w^s, a_i\rangle - \gamma_s + 1 \leqslant 0, \qquad i \in 1:m, \quad s \in 1:h;$$
$$-\langle w^s, b_j\rangle + \gamma_s + 1 \leqslant 0, \qquad j \in 1:k, \quad s \in S(j).$$

Отсюда очевидным образом следует (1) и (2).
Достаточность. Очевидна. Нужно положить $v^s = w^s$, $\xi_s = \gamma_s$. $\square$

2°. Строгая h-отделимость имеет простую геометрическую интерпретацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для того чтобы множества A и B были строго h-отделимыми при некотором $h \leqslant |B|$, необходимо и достаточно, чтобы выпуклая оболочка множества A и множество B не пересекались, то есть чтобы*

$$\operatorname{conv}(A) \cap B = \varnothing. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Допустим противное. Тогда найдется точка $b_j \in B$, принадлежащая $\operatorname{conv}(A)$. Это значит, что b_j допускает представление

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, a_i,$$

где коэффициенты λ_i неотрицательны и в сумме равны единице. По определению строгой h-отделимости при каждом $s \in 1:h$ имеем

$$\langle v^s, b_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle v^s, a_i \rangle < \xi_s.$$

Вместе с тем, по j найдётся индекс $s \in 1:h$, на котором

$$\langle v^s, b_j \rangle > \xi_s.$$

Получили противоречие.

Достаточность. В силу (3) каждая точка $b_j \in B$ может быть строго отделена от выпуклого замкнутого множества $\operatorname{conv}(A)$. Это значит, что найдётся пара $\{v^j, \xi_j\}$ со свойствами

$$\begin{aligned} &\langle v^j, a \rangle < \xi_j \quad \text{для всех } a \in \operatorname{conv}(A), \\ &\langle v^j, b_j \rangle > \xi_j. \end{aligned}$$

Ясно, что $|B|$ пар $\{v^j, \xi_j\}$ строго отделяют множества A и B.

На самом деле, некоторые гиперплоскости H_s могут отделять от $\operatorname{conv}(A)$ сразу несколько точек b_j, поэтому в общем случае $h \leqslant |B|$. На рис. 2 приведён пример строго $|B|$-отделимых множеств. □

3°. Наша цель — сформулировать задачу о строгой h-отделимости как экстремальную задачу. Обозначим $G = \{w^s, \gamma_s\}_{s=1}^{h}$ и введём функцию

$$F(G) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \max_{s \in 1:h} \big[\langle w^s, a_i \rangle - \gamma_s + 1\big]_+ + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \min_{s \in 1:h} \big[-\langle w^s, b_j \rangle + \gamma_s + 1\big]_+,$$

где $[u]_+ = \max\{0, u\}$. Очевидно, что $F(G) \geqslant 0$.

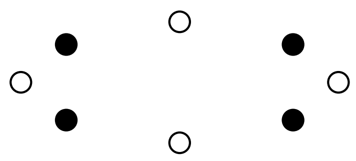

Рис. 2. Строго $|B|$-отделимые множества

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Множества A и B строго h-отделимы тогда и только тогда, когда существует набор $G_* = \{w_*^s, \gamma_s^*\}_{s=1}^h$, на котором*

$$F(G_*) = 0. \tag{4}$$

При выполнении условия (4):

1) *в G_* не все векторы w_*^s равны нулю;*

2) *если векторы w_*^s равны нулю на множестве $S \subset 1:h$, то A и B строго $\big(h - |S|\big)$-отделимы.*

Предварительно установим некоторые свойства плюсиковых функций.

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства*

$$\max_{s\in 1:h} [u_s]_+ = \big[\max_{s\in 1:h} u_s\big]_+, \tag{5}$$

$$\min_{s\in 1:h} [u_s]_+ = \big[\min_{s\in 1:h} u_s\big]_+. \tag{6}$$

Доказательство. Если все u_s неположительны, то равенство (5) очевидно (оно принимает вид $0 = 0$). Если $u_s > 0$ при некотором $s \in 1:h$, то как левая, так и правая части формулы (5) равны $\max_{s\in 1:h} u_s$.

Аналогично, если все u_s неотрицательны, то обе части формулы (6) равны $\min_{s\in 1:h} u_s$. В противном случае формула (6) принимает вид $0 = 0$. $\square$

ЛЕММА 2. *Справедливо неравенство*

$$\max_{s\in 1:h} [1 - u_s]_+ + \min_{s\in 1:h} [1 + u_s]_+ \geqslant 2. \tag{7}$$

Равенство достигается только тогда, когда величина $u_* = \min_{s\in 1:h} u_s$ принадлежит отрезку $[-1, 1]$.

Доказательство. Очевидно, что функция $[1-u]_+$ монотонно убывает (не строго), поэтому

$$\max_{s\in 1:h} [1 - u_s]_+ = [1 - u_*]_+.$$

Аналогично, функция $[1+u]_+$ монотонно возрастает (не строго), поэтому

$$\min_{s\in 1:h}[1+u_s]_+ = [1+u_*]_+.$$

Остается учесть, что

$$[1-u_*]_+ + [1+u_*]_+ \geqslant 2,$$

причём равенство достигается только тогда, когда $u_* \in [-1,1]$ (см. рис. 3). $\square$

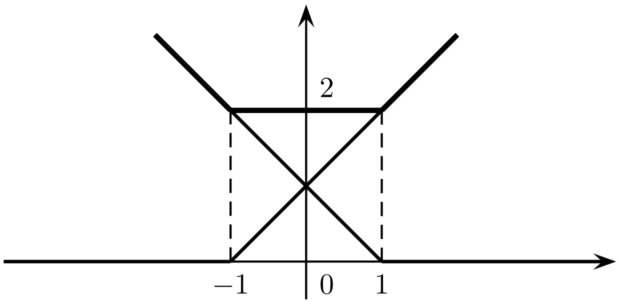

Рис. 3. График функции $y = [1-u]_+ + [1+u]_+$

4°. Переходим к доказательству предложения 3.

Доказательство. Согласно предложению 1 множества A и B строго h-отделимы тогда и только тогда, когда существует набор $G = \{w^s, \gamma_s\}_{s=1}^h$, такой, что выполняются неравенства (1) и (2). С другой стороны, в силу (5) и (6) условие $F(G) = 0$ равносильно тем же неравенствам (1) и (2). Значит, существование набора G_* со свойством (4) эквивалентно строгой h-отделимости множеств A и B.

Пусть $F(G_*) = 0$. Тогда среди векторов w_*^s есть ненулевые. Действительно, в противном случае получили бы

$$\max_{s\in 1:h}[1-\gamma_s]_+ + \min_{s\in 1:h}[1+\gamma_s]_+ = 0,$$

что противоречит (7).

По-прежнему считаем, что $F(G_*) = 0$. Предположим, что в наборе $G_* = \{w_*^s, \gamma_s^*\}_{s=1}^h$ при $s \in S$ векторы w_*^s нулевые. Тогда

$$0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \max\Big\{\max_{s\in 1:h\setminus S}\big[\langle w_*^s, a_i\rangle - \gamma_s + 1\big]_+,\ \max_{s\in S}[1-\gamma_s]_+\Big\} +$$
$$+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k \min\Big\{\min_{s\in 1:h\setminus S}\big[-\langle w_*^s, b_j\rangle + \gamma_s + 1\big]_+,\ \min_{s\in S}[1+\gamma_s]_+\Big\}.$$

Из равенства нулю первой суммы следует, что

$$\max_{s\in 1:h\setminus S}\big[\langle w_*^s, a_i\rangle - \gamma_s + 1\big] \leqslant 0 \qquad \text{для всех } i \in 1:m; \tag{8}$$

$$1-\gamma_s \leqslant 0, \qquad s\in S.$$

В частности, $1+\gamma_s \geqslant 2$ при $s \in S$. Равенство нулю второй суммы возможно только тогда, когда

$$\min_{s\in 1:h\setminus S}\big[-\langle w_*^s, b_j\rangle + \gamma_s + 1\big] \leqslant 0 \quad \text{для всех } j \in 1:k. \tag{9}$$

На основании (8), (9) и предложения 1 заключаем, что множества A и B строго $\big(h-|S|\big)$-отделимы. $\square$

Предложение 3 сводит задачу о строгой h-отделимости к задаче минимизации функции $F(G)$ на наборах $G=\{w^s,\gamma_s\}_{s=1}^h$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Astorino A., Gaudioso M. *Polyhedral separability through successive LP* // JOTA. 2002. Vol. 112. No 2. P. 265–293.