КОНЕЧНОМЕРНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

11 сентября 2010 г.

Текст доклада соответствует лекции, которую автор много лет читал в курсе "Экстремальные задачи".

1°. В линейном пространстве $\mathbb{R}^N$ векторов $x = x[N]$ рассмотрим линейный (однородный и аддитивный) функционал f. По определению

$$f(\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2) = \alpha_1\, f(x_1) + \alpha_2\, f(x_2) \tag{1}$$

при любых x_1, x_2 из $\mathbb{R}^N$ и всех вещественных α_1, α_2.

Единичные орты в $\mathbb{R}^N$ обозначим $e_j = e_j[N]$. Очевидно, что

$$x = \sum_{j \in N} x[j]\, e_j.$$

Согласно (1)

$$f(x) = \sum_{j \in N} x[j]\, f(e_j).$$

Введём вектор $\xi = \xi[N]$ с компонентами $\xi[j] = f(e_j)$. Тогда

$$f(x) = \sum_{j \in N} x[j] \times \xi[j] = \langle \xi, x \rangle \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Получили общий вид линейного функционала в $\mathbb{R}^N$. Нетрудно понять, что вектор ξ, сопоставляемый функционалу f, определяется единственным образом.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. В пространстве $\mathbb{R}^N$ введём чебышёвскую норму

$$\|x\|_\infty = \max_{j\in N} \bigl|x[j]\bigr|.$$

Согласованная с ней норма линейного функционала f определяется так:

$$\|f\| = \max_{\|x\|_\infty = 1} \bigl|f(x)\bigr|.$$

Покажем, что

$$\|f\| = \sum_{j\in N} \bigl|\xi[j]\bigr|. \tag{3}$$

Для вектора x с $\|x\|_\infty = 1$ согласно (2) имеем

$$\bigl|f(x)\bigr| \leqslant \sum_{j\in N} \bigl|x[j]\bigr| \times \bigl|\xi[j]\bigr| \leqslant \sum_{j\in N} \bigl|\xi[j]\bigr|. \tag{4}$$

При $\xi = \mathbb{O}$ равенство (3) справедливо, поскольку обе его части равны нулю. Пусть $\xi \neq \mathbb{O}$. Положим $x_0[j] = \operatorname{sign} \xi[j]$. Тогда $\|x_0\|_\infty = 1$ и

$$f(x_0) = \sum_{j\in N} \bigl|\xi[j]\bigr|. \tag{5}$$

Формула (3) следует из (4) и (5).

3°. *Моментом* функционала f называется его значение на некотором элементе $x \in \mathbb{R}^N$, то есть величина $f(x)$. Рассмотрим задачу: *среди линейных функционалов, имеющих заданные моменты*

$$f(a_i) = b[i], \qquad i \in M,$$

найти функционал с наименьшей нормой. Здесь a_i — фиксированные векторы из $\mathbb{R}^N$ и $b[i]$ — фиксированные вещественные числа. С учётом (2) и (3) эту задачу можно формализовать так:

$$\begin{gathered} \|\xi\|_1 := \sum_{j\in N} \bigl|\xi[j]\bigr| \to \inf, \\ \langle a_i, \xi\rangle = b[i], \quad i \in M. \end{gathered} \tag{6}$$

Обозначим через $A = A[M,N]$ матрицу со строками a_i, $i \in M$. Тогда ограничения задачи (6) примут вид

$$A\xi = b. \tag{7}$$

Будем изучать задачу (6) при следующих предположениях: вектор b отличен от нуля (иначе единственным решением задачи (6) является $\xi = \mathbb{O}$);

система линейных уравенений (7) совместна. Последнее означает, что множество планов задачи (6) непусто.

Перейдём от (6) к эквивалентной задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in N}\big(y[j]+z[j]\big)\to \inf,\\ &\xi[j]=y[j]-z[j], \qquad j\in N;\\ &A\xi=b;\\ &y[j]\geqslant 0,\quad z[j]\geqslant 0,\quad j\in N. \end{aligned}$$

Сделаем ещё один эквивалентный переход, исключив вектор ξ:

$$\begin{gathered} \sum_{j\in N}\big(y[j]+z[j]\big)\to \inf,\\ Ay-Az=b,\\ y\geqslant \mathbb{O},\quad z\geqslant \mathbb{O}. \end{gathered} \tag{8}$$

Теперь запишем двойственную задачу линейного программирования

$$\begin{gathered} \langle b,u\rangle\to \sup,\\ u[M]\times A[M,j]\leqslant 1,\quad j\in N;\\ -u[M]\times A[M,j]\leqslant 1,\quad j\in N. \end{gathered} \tag{9}$$

В силу совместности системы (7) множество планов задачи (8) непусто, при этом целевая функция ограничена снизу нулём. Значит, задача (8) имеет решение. Как следствие получаем, что задачи (6), (9) также имеют решения и экстремальные значения целевых функций в задачах (6), (8) и (9) равны между собой. Это общее значение обозначим ν. Условие $b\neq \mathbb{O}$ в задаче (6) гарантирует, что $\nu>0$.

4°. Введём функцию

$$\varphi(u):=\max_{j\in N}\big|u[M]\times A[M,j]\big| = \|uA\|_\infty = \Big\|\sum_{i\in M} u[i]\,a_i\Big\|_\infty. \tag{10}$$

С её помощью ограничения задачи (9) можно переписать в виде

$$\varphi(u)\leqslant 1.$$

Перейдём к взаимной по Эйлеру задаче (целевая функция и функция, входящая в ограничение, меняются местами):

$$\begin{gathered} \varphi(u)\to \inf,\\ \langle b,u\rangle = 1. \end{gathered} \tag{11}$$

Сначала покажем, что $\varphi(u) > 0$ на всех планах задачи (11). Допустим противное. Тогда найдётся вектор $u_0 \in \mathbb{R}^M$ со свойствами

$$\varphi(u_0) = 0, \qquad \langle b, u_0 \rangle = 1.$$

Согласно (10), $u_0 A = \mathbb{O}$. Возьмём вектор $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющий системе (7) (по условию такой вектор существует). Получим

$$1 = \langle b, u_0 \rangle = \langle u_0, A\xi_0 \rangle = \langle u_0 A, \xi_0 \rangle = 0.$$

Противоречие убеждает нас в положительности $\varphi(u)$ на планах задачи (11).

ТЕОРЕМА 1. *Задача* (11) *имеем решение. Произведение экстремальных значений целевых функций в задачах* (11) *и* (6) *равно единице.*

Доказательство. Отметим, что функция $\varphi(u)$ положительно однородна, то есть

$$\varphi(\lambda u) = \lambda\, \varphi(u) \qquad \text{при } \lambda > 0 \text{ и всех } u \in \mathbb{R}^M.$$

Возьмём решение u^* задачи (9) и положим $u_* = \frac{1}{\nu}\, u^*$. Получим

$$\langle b, u_* \rangle = 1, \qquad \varphi(u_*) \leqslant \tfrac{1}{\nu}. \tag{12}$$

В частности, u_* — план задачи (11).

Пусть u — произвольный план задачи (11). Сопоставим ему вектор $\hat{u} = u/\varphi(u)$. Имеем $\varphi(\hat{u}) = 1$, так что $\hat{u}$ — план задачи (9). При этом

$$1 = \langle b, u \rangle = \varphi(u)\, \langle b, \hat{u} \rangle \leqslant \nu\, \varphi(u).$$

Отсюда в силу (12) следует, что

$$\varphi(u) \geqslant \tfrac{1}{\nu} \geqslant \varphi(u_*). \tag{13}$$

Установлено, что u_* — решение задачи (11).

Обозначим $\mu = \varphi(u_*)$. Подставив в (13) $u = u_*$, получим $\varphi(u_*) = \frac{1}{\nu}$, или $\mu\,\nu = 1$. Теорема доказана. □

На рис. иллюстрируется связь между решениями задач (9) и (11).

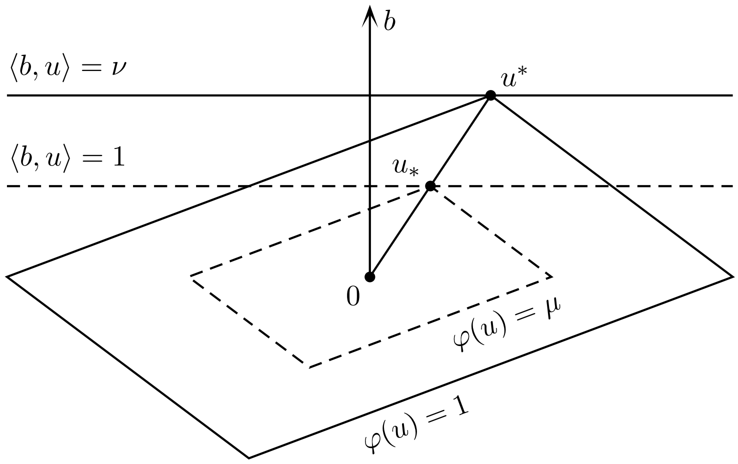

Рис.

5°. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — векторы из $\mathbb{R}^n$, причём a_0 не принадлежит линейной оболочке, натянутой на векторы $a_1, \ldots, a_m$:

$$a_0 \notin \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m). \tag{14}$$

Рассмотрим задачу наилучшего приближения

$$\left\| a_0 - \sum_{i=1}^{m} x[i]\, a_i \right\|_\infty \to \inf_{x \in \mathbb{R}^m}. \tag{15}$$

Введём вектор $b = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и обозначим через A матрицу со строками $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Задача (15) эквивалентна задаче вида (11)

$$\begin{gathered} \|uA\|_\infty \to \inf, \\ \langle b, u\rangle = 1. \end{gathered} \tag{16}$$

Сопоставим последней задаче задачу вида (6)

$$\begin{aligned} &\|\xi\|_1 := \sum_{j=0}^{m} \bigl|\xi[j]\bigr| \to \inf, \\ &\langle a_0, \xi\rangle = 1, \\ &\langle a_i, \xi\rangle = 0, \quad i \in 1:m. \end{aligned} \tag{17}$$

Мы хотим воспользоваться теоремой 1, но для этого нужно проверить, что множество планов задачи (17) непусто.

Допустим противное, то есть что система линейных уравнений

$$\begin{aligned} \langle a_0, \xi \rangle &= 1, \\ \langle a_i, \xi \rangle &= 0, \quad i \in 1:m. \end{aligned}$$

не имеет решения. Тогда найдётся решение u_0 однородной сопряжённой системы

$$\sum_{i=0}^{m} u[i]\, a_i = \mathbb{O},$$

такое, что $u_0[0] \neq 0$. Положив $x_0[i] = -u_0[i]/u_0[0]$, $i \in 1:m$, получим

$$a_0 = \sum_{i=1}^{m} x_0[i]\, a_i.$$

Но это противоречит условию (14).

На основании теоремы 1 приходим к такому заключению.

ТЕОРЕМА 2. *Задачи* (15) *и* (17) *имеют решения. Произведение экстремальных значений целевых функций в задачах* (15), (17) *равно единице.*

Обозначим соответствующие экстремальные значения через μ и ν. Тогда для любого плана ξ задачи (17) выполняется неравенство

$$\mu = \frac{1}{\nu} \geqslant \frac{1}{\|\xi\|_1}. \tag{18}$$

Равенство достигается на решении задачи (17). Формула (18) даёт оценку снизу для величины наилучшего приближения.

6°. Проблема моментов во всей её полноте рассматривается в монографии [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г., Нудельман А. А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* М.: Наука, 1973. 552 с.