РЕКУРРЕНТНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ*

В. Н. Малозёмов, С. В. Рыбин

malv@gamma.math.spbu.ru rsvvm2leti@yandex.ru

7 декабря 2004 г.

1°. Пусть A_i – $(r_i \times n)$-матрицы, $i = 1, \ldots, m$. Обозначим

$$g_i(x) = b_i - A_i x$$

и рассмотрим при фиксированном $\lambda \in (0, 1]$ последовательность экстремальных задач

$$Q_k(x) := \sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} \|g_i(x)\|^2 \to \min, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

При $\lambda = 1$ и $k = m$ имеем стандартную блочную задачу о наименьших квадратах.

Приведем квадратичную функцию $Q_k(x)$ к каноническому виду. Запишем

$$Q_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} \langle b_i - A_i x, b_i - A_i x \rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} \|b_i\|^2 - 2 \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} A_i^T b_i, x \right\rangle + \left\langle \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} A_i^T A_i \right) x, x \right\rangle .$$

Обозначим

$$H_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} A_i^T A_i.$$

Тогда

$$Q_k(x) = \langle H_k x, x \rangle - 2 \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} A_i^T b_i, x \right\rangle + \sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} \|b_i\|^2.$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Отметим, что

$$H_k = \lambda H_{k-1} + A_k^T A_k,\ k = 1,\dots,m; \quad H_0 = \mathbf{0}. \tag{2}$$

В силу определения матрица H_k симметрична и неотрицательно определена. Если она имеет обратную, то решением задачи (1) при фиксированном k является вектор

$$\Psi_k = H_k^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} A_i^T b_i\right). \tag{3}$$

ТЕОРЕМА. *Предположим, что матрица $A_1^T A_1$ положительно определена. Тогда векторы Ψ_k могут быть вычислены рекуррентно:*

$$\begin{aligned} &\Psi_k = \Psi_{k-1} + H_k^{-1} A_k^T (b_k - A_k \Psi_{k-1}),\ k = 1,\dots,m;\\ &\Psi_0 - \text{ произвольный вектор.} \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Так как матрица $A_1^T A_1$ положительно определена, то все матрицы $H_1,\dots,H_m$ также положительно определены и, в частности, обратимы.

При $k=1$ формула (4) проверяется непосредственно:

$$H_1 = A_1^T A_1, \quad \Psi_1 = H_1^{-1} A_1^T b_1 = \Psi_0 + H_1^{-1} A_1^T (b_1 - A_1 \Psi_0).$$

Пусть $k \geqslant 2$. Согласно (3)

$$\lambda H_{k-1}\Psi_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{k-i} A_i^T b_i = H_k \Psi_k - A_k^T b_k.$$

Учитывая (2), получаем

$$\begin{aligned} H_k\Psi_k = \lambda H_{k-1}\Psi_{k-1} + A_k^T b_k = (H_k - A_k^T A_k)\Psi_{k-1} + A_k^T b_k =\\ = H_k \Psi_{k-1} + A_k^T (b_k - A_k \Psi_{k-1}). \end{aligned}$$

Остается обе части последнего равенства умножить на H_k^{-1}. $\square$

2°. Матрицы H_k пересчитываются по формуле (2). Выведем формулу для пересчета H_k^{-1}.

ЛЕММА (Шерман-Моррисон-Вудбери). *Пусть*

$$D = H + A^T A,$$

где $A - (r \times n)$-матрица. Если матрица H симметрична и положительно определена, то

$$D^{-1} = H^{-1} - H^{-1} A^T P^{-1} A H^{-1}, \tag{5}$$

где $P = I_r + A H^{-1} A^T$, I_r- единичная $(r \times r)$-матрица.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что матрицы D и P положительно определены и потому имеют обратные. Покажем, что

$$(H + A^T A)(H^{-1} - H^{-1} A^T P^{-1} A H^{-1}) = I_n.$$

Преобразуем левую часть:

$$I_n + A^T A H^{-1} - A^T P^{-1} A H^{-1} - A^T (A H^{-1} A^T) P^{-1} A H^{-1} =$$
$$= I_n + A^T A H^{-1} - A^T P^{-1} A H^{-1} - A^T (P - I_r) P^{-1} A H^{-1} = I_n.$$

Лемма доказана. □

Из (2) и (5) следует, что

$$H_k^{-1} = \lambda^{-1} H_{k-1}^{-1} - \lambda^{-2} H_{k-1}^{-1} A_k^T P_k^{-1} A_k H_{k-1}^{-1}, \qquad (6)$$

где $P_k = I_{r_k} + \lambda^{-1} A_k H_{k-1}^{-1} A_k^T$.

При $r_k = 1$ матрица A_k становится вектором-строкой. В этом случае формула (6) принимает более простой вид:

$$H_k^{-1} = \lambda^{-1} H_{k-1}^{-1} - \lambda^{-2} \alpha_k^{-1} (H_{k-1}^{-1} A_k^T)(H_{k-1}^{-1} A_k^T)^T,$$

где $\alpha_k = 1 + \lambda^{-1} \langle A_k, H_{k-1}^{-1} A_k^T \rangle$.

3°. Указанная теорема вместе с леммой используются в алгоритме последовательной регрессии при адаптивной обработке сигналов [1, с.139-145]. По поводу леммы Шермана-Моррисона-Вудбери см.[2]

ЛИТЕРАТУРА

1. Уидроу Б., Стирнз С. *Адаптивная обработка сигналов.* М.: Радио и связь, 1989. 440с.

2. Малоземов В. Н., Монако М. Ф. , Петров А. В. *Формулы Фробениуса, Шермана-Моррисона и близкие вопросы* // Журн. вычисл. мат. и матем. физики. 2002. Т. 42. No. 10. С. 1459–1465.