СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА*

Мохамед Валид Салх Отман Габр
mwaleed73@yahoo.com

18 сентября 2010 г.

В данной работе построена система вложенных пространств тригонометрических сплайнов первого порядка при произвольном способе измельчения сетки. Для таких пространств получено вейвлетное разложение и выведены соответствующие формулы декомпозиции и реконструкции.

1°. На конечном или бесконечном интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ введём сетку $X = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, такую, что при всех $j \in \mathbb{Z}$

$$\cdots < x_{j-1} < x_j < x_{j+1} < \cdots; \qquad x_{j+2} - x_j < 2\pi$$

и

$$\lim_{j\to-\infty} x_j = \alpha, \qquad \lim_{j\to+\infty} x_j = \beta.$$

Обозначим $s(x) = \sin(\frac{x}{2})$. Базисные тригонометрические сплайны первого порядка зададим формулой (см. рис. 1)

$$\mathfrak{T}_{j,X}(x) = \begin{cases} \dfrac{s(x-x_j)}{s(x_{j+1}-x_j)} & \text{при } x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}\,, \\ \dfrac{s(x_{j+2}-x)}{s(x_{j+2}-x_{j+1})} & \text{при } x_{j+1} \leqslant x \leqslant x_{j+2}\,, \\ 0 & \text{при остальных } x \in (\alpha,\beta). \end{cases} \tag{1}$$

Очевидно, что $\mathfrak{T}_{j,X}(x_{i+1}) = \delta_{ij}$ при всех $i, j \in \mathbb{Z}$.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: http://www.dha.spb.ru/

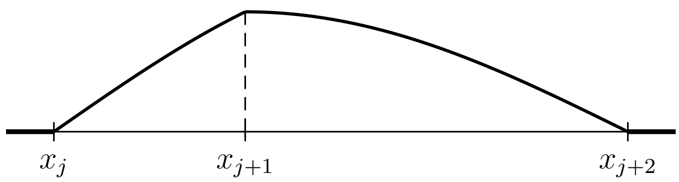

Рис. 1

Определим на $C(\alpha,\beta)$ линейные функционалы λ_i следующим образом:

$$\langle \lambda_i, u\rangle = u(x_{i+1}), \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

Система функционалов $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *биортогональна* системе сплайнов $\{\mathfrak{T}_{j,X}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ в том смысле, что

$$\langle \lambda_i, \mathfrak{T}_{j,X}\rangle := \mathfrak{T}_{j,X}(x_{i+1}) = \delta_{ij}\,, \quad i,j\in\mathbb{Z}.$$

2°. **Калибровочное соотношение**. Зафиксируем $k\in\mathbb{Z}$ и $\theta\in(x_k,x_{k+1})$. Введём расширенную на один узел сетку $Y=\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ по правилу:

$$y_{k+1}=\theta; \quad y_j = x_j \text{ при } j\leqslant k; \quad y_j = x_{j-1} \text{ при } j\geqslant k+2.$$

Сплайны $\mathfrak{T}_{j,Y}(x)$ определим аналогично (1) с заменой сетки X на Y.

Система функционалов $\{\nu_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, где $\langle\nu_i,u\rangle = u(y_{i+1})$, биортогональна системе сплайнов $\{\mathfrak{T}_{j,Y}\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Отметим, что

$$\nu_i=\lambda_i \text{ при } i\leqslant k-1, \quad \nu_{i+1}=\lambda_i \text{ при } i\geqslant k.$$

В частности, при всех $j\in\mathbb{Z}$

$$\langle \lambda_i, \mathfrak{T}_{j,Y}\rangle = \delta_{ij}\,, \qquad \text{если } i\leqslant k-1, \tag{2}$$

$$\langle \lambda_i, \mathfrak{T}_{j,Y}\rangle = \delta_{i+1,j}\,, \quad \text{если } i\geqslant k. \tag{3}$$

ТЕОРЕМА 1. *При $x\in(\alpha,\beta)$ справедливы соотношения*

$$\mathfrak{T}_{j,X}(x) = \mathfrak{T}_{j,Y}(x), \qquad \textit{если } j\leqslant k-2; \tag{4}$$

$$\mathfrak{T}_{j,X}(x) = \mathfrak{T}_{j+1,Y}(x), \quad \textit{если } j\geqslant k+1; \tag{5}$$

$$\mathfrak{T}_{k-1,X}(x) = \mathfrak{T}_{k-1,Y}(x) + \frac{s(y_{k+2}-y_{k+1})}{s(y_{k+2}-y_k)}\,\mathfrak{T}_{k,Y}(x), \tag{6}$$

$$\mathfrak{T}_{k,X}(x) = \frac{s(y_{k+1}-y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)}\,\mathfrak{T}_{k,Y}(x) + \mathfrak{T}_{k+1,Y}(x). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о*. Соотношения (4) и (5) очевидны. Разберёмся с (6).

Обратим внимание на носитель сплайна $\mathfrak{T}_{k-1,X}(x)$ (см. рис. 2):

$$\begin{aligned}\big[x_{k-1}, x_{k+1}\big] &= \big[x_{k-1}, x_k\big] \cup \big[x_k, \theta\big] \cup \big[\theta, x_{k+1}\big] = \\ &= \big[y_{k-1}, y_k\big] \cup \big[y_k, y_{k+1}\big] \cup \big[y_{k+1}, y_{k+2}\big].\end{aligned}$$

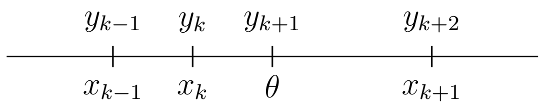

Рис. 2

При $x \in [x_{k-1}, x_k]$ имеем

$$\mathfrak{T}_{k-1,X}(x) = \frac{s(x - x_{k-1})}{s(x_k - x_{k-1})} = \frac{s(x - y_{k-1})}{s(y_k - y_{k-1})} = \mathfrak{T}_{k-1,Y}(x).$$

Отсюда следует (6), поскольку $\mathfrak{T}_{k,Y}(x) = 0$ при $x \in [x_{k-1}, x_k]$.

При $x \in [\theta, x_{k+1}]$

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{k-1,X}(x) &= \frac{s(x_{k+1} - x)}{s(x_{k+1} - x_k)} = \frac{s(y_{k+2} - x)}{s(y_{k+2} - y_k)} = \\ &= \frac{s(y_{k+2} - y_{k+1})}{s(y_{k+2} - y_k)} \cdot \frac{s(y_{k+2} - x)}{s(y_{k+2} - y_{k+1})} = \frac{s(y_{k+2} - y_{k+1})}{s(y_{k+2} - y_k)} \mathfrak{T}_{k,Y}(x).\end{aligned}$$

Отсюда следует (6), поскольку $\mathfrak{T}_{k-1,Y}(x) = 0$ при $x \in [\theta, x_{k+1}]$.

При $x \in [x_k, \theta]$ соотношение (6) принимает вид

$$\frac{s(x_{k+1} - x)}{s(x_{k+1} - x_k)} = \frac{s(y_{k+1} - x)}{s(y_{k+1} - y_k)} + \frac{s(y_{k+2} - y_{k+1})}{s(y_{k+2} - y_k)} \cdot \frac{s(x - y_k)}{s(y_{k+1} - y_k)}\,. \tag{8}$$

Обозначим (см. рис. 3)

$$a = x - y_k\,, \quad b = y_{k+2} - y_{k+1}\,, \quad c = y_{k+1} - x.$$

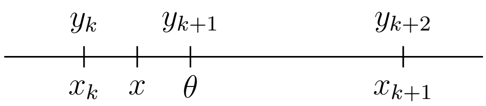

Рис. 3

В этих обозначениях перепишем формулу (8):

$$\frac{s(b + c)}{s(a + b + c)} = \frac{s(c)}{s(a + c)} + \frac{s(b)\,s(a)}{s(a + b + c)\,s(a + c)} \tag{9}$$

*Приводимое доказательство предложено В. Н. Малозёмовым.

или

$$s(a+c)\,s(b+c) - s(a)\,s(b) = s(c)\,s(a+b+c). \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что справедливо тригонометрическое тождество

$$\sin(a+c)\sin(b+c) - \sin a\,\sin b = \sin c\,\sin(a+b+c) \tag{11}$$

(обе его части приводятся к виду

$$\sin c\,[\sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c]\,).$$

Заменив в (11) величины a, b, c на $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, получим (10).

Соотношение (6) установлено.

Переходим к соотношению (7). Рассмотрим носитель сплайна $\mathfrak{T}_{k,X}(x)$ (см. рис. 4):

$$\begin{aligned}\big[x_k, x_{k+2}\big] &= \big[x_k, \theta\big] \cup \big[\theta, x_{k+1}\big] \cup \big[x_{k+1}, x_{k+2}\big] = \\ &= \big[y_k, y_{k+1}\big] \cup \big[y_{k+1}, y_{k+2}\big] \cup \big[y_{k+2}, y_{k+3}\big].\end{aligned}$$

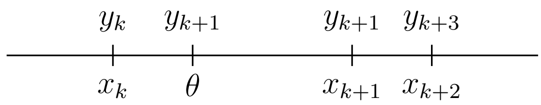

Рис. 4

При $x \in [x_k, \theta]$ имеем $\mathfrak{T}_{k+1,Y}(x) = 0$ и

$$\mathfrak{T}_{k,X}(x) = \frac{s(x-x_k)}{s(x_{k+1}-x_k)} = \frac{s(x-y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)} = \frac{s(y_{k+1}-y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)}\,\mathfrak{T}_{k,Y}(x).$$

Отсюда следует (7).

При $x \in [x_{k+1}, x_{k+2}]$

$$\mathfrak{T}_{k,X}(x) = \frac{s(x_{k+2}-x)}{s(x_{k+2}-x_{k+1})} = \frac{s(y_{k+3}-x)}{s(y_{k+3}-y_{k+2})} = \mathfrak{T}_{k+1,Y}(x).$$

Отсюда и из равенства $\mathfrak{T}_{k,Y}(x) = 0$ при $x \in [x_{k+1}, x_{k+2}]$ следует (7).

При $x \in [\theta, x_{k+1}]$ соотношение (7) принимает вид

$$\frac{s(x-x_k)}{s(x_{k+1}-x_k)} = \frac{s(y_{k+1}-y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)} \cdot \frac{s(y_{k+2}-x)}{s(y_{k+2}-y_{k+1})} + \frac{s(x-y_{k+1})}{s(y_{k+2}-y_{k+1})}\,. \tag{12}$$

Обозначим (см. рис. 5)

$$a = y_{k+2} - x, \quad b = y_{k+1} - y_k\,, \quad c = x - y_{k+1}\,.$$

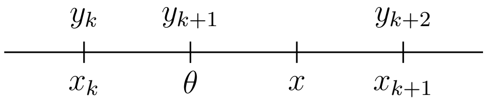

Рис. 5

В этих обозначениях перепишем соотношение (12):

$$\frac{s(b+c)}{s(a+b+c)} = \frac{s(b)\,s(a)}{s(a+b+c)\,s(a+c)} + \frac{s(c)}{s(a+c)}\,. \tag{13}$$

Отметим, что (13) совпадает с равенством (9), справедливость которого была установлена ранее. Теорема доказана. □

Результат теоремы 1 можно представить в виде формулы

$$\mathfrak{T}_{i,X}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_{ij}\,\mathfrak{T}_{j,Y}(x), \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}
p_{ij} = \delta_{ij} \qquad \text{при} \;\; i \leqslant k-2,\ j \in \mathbb{Z}; \\
p_{ij} = \delta_{i+1,j} \quad \text{при} \;\; i \geqslant k+1,\ j \in \mathbb{Z}; \\
p_{k-1,j} = 0 \;\; \text{при} \; j \neq k-1, k; \quad p_{k-1,k-1} = 1; \\
p_{k-1,k} = \frac{s(y_{k+2} - y_{k+1})}{s(y_{k+2} - y_k)}\,; \\
p_{kj} = 0 \;\; \text{при} \; j \neq k, k+1; \quad p_{k,k+1} = 1; \\
p_{kk} = \frac{s(y_{k+1} - y_k)}{s(y_{k+2} - y_k)}\,.
\end{gathered}$$

Формулу (14) назовём *калибровочным соотношением* для базисных тригонометрических сплайнов первого порядка.

3°. Вейвлетное разложение. Обозначим Π_X линейную оболочку множества базисных сплайнов $\{\mathfrak{T}_{j,X}\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Элементы линейного пространства Π_X будем называть *тригонометрическими сплайнами первого порядка на сетке* X. Таким образом, запись $w \in \Pi_X$ означает, что

$$w(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\,\mathfrak{T}_{j,X}(x), \tag{15}$$

где a_j — вещественные коэффициенты. Аналогично определяется пространство Π_Y. В силу теоремы 1, $\Pi_X \subset \Pi_Y$.

Отметим, что в сумме из правой части формулы (15) по свойству носителей базисных сплайнов при каждом $x \in (\alpha, \beta)$ отличны от нуля не более двух слагаемых.

Введём оператор проектирования P пространства Π_Y на подпространство Π_X вида

$$Pv = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \langle \lambda_i, v\rangle \, \mathfrak{T}_{i,X} \,, \qquad v \in \Pi_Y. \tag{16}$$

Очевидно, что

$$v = Pv + u, \tag{17}$$

где $u \in \Pi_Y$. Сплайн u назовём *вейвлетной составляющей.*

Пусть $a_i = \langle \lambda_i, v\rangle$,

$$v = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \, \mathfrak{T}_{j,Y} \,, \qquad u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j \, \mathfrak{T}_{j,Y} \,.$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы соотношения*

$$a_i = c_i \ \ \textit{при}\ i \leqslant k-1, \quad a_i = c_{i+1} \ \ \textit{при}\ i \geqslant k; \tag{18}$$

$$b_j = 0 \ \ \textit{при}\ j \neq k; \tag{19}$$

$$b_k = c_k - \frac{s(y_{k+2}-y_{k+1})}{s(y_{k+2}-y_k)}\, c_{k-1} - \frac{s(y_{k+1}-y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)}\, c_{k+1} \,. \tag{20}$$

Доказательство. Имеем

$$a_i = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \, \langle \lambda_i, \mathfrak{T}_{j,Y}\rangle \tag{21}$$

и согласно (17), (16), (14)

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \, \mathfrak{T}_{j,Y} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_{ij} \, \mathfrak{T}_{j,Y} + \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j \, \mathfrak{T}_{j,Y} \,. \tag{22}$$

Соотношения (18) следуют из (21) и (2), (3). Действительно,

$$a_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \, \delta_{ij} = c_i & \text{при } \ i \leqslant k-1, \\ \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \, \delta_{i+1,j} = c_{i+1} & \text{при } \ i \geqslant k. \end{cases}$$

Линейная независимость системы базисных сплайнов $\{\mathfrak{T}_{j,Y}(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ на (α,β) и (22) приводят к равенствам

$$c_j = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \, p_{ij} + b_j \,, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда
$$b_j = c_j - \sum_{i\leqslant k-2} a_i\, p_{ij} - a_{k-1}\, p_{k-1,j} - a_k\, p_{kj} - \sum_{i\geqslant k+1} a_i\, p_{ij}\,. \tag{23}$$
Принимая во внимание свойства коэффициентов p_{ij} и (18), получаем
$$\sum_{i\leqslant k-2} a_i\, p_{ij} = \sum_{i\leqslant k-2} c_i\, \delta_{ij} = \begin{cases} c_j & \text{при } j\leqslant k-2,\\ 0 & \text{при } j>k-2;\end{cases}$$
$$\sum_{i\geqslant k+1} a_i\, p_{ij} = \sum_{i\geqslant k+1} c_{i+1}\, \delta_{i+1,j} = \begin{cases} c_j & \text{при } j\geqslant k+2,\\ 0 & \text{при } j<k+2,\end{cases}$$
так что при $j\leqslant k-2$ и $j\geqslant k+2$
$$b_j = -a_{k-1}\, p_{k-1,j} - a_k\, p_{kj} = 0.$$
При $j=k-1$ и $j=k+1$ имеем соответственно
$$\begin{aligned} b_{k-1} &= c_{k-1} - c_{k-1}\, p_{k-1,k-1} = 0,\\ b_{k+1} &= c_{k+1} - c_{k+1}\, p_{k,k+1} = 0.\end{aligned}$$
Соотношение (19) установлено.

Осталось заметить, что согласно (23)
$$b_k = c_k - c_{k-1}\, p_{k-1,k} - c_{k+1}\, p_{kk}\,.$$
Это равенство эквивалентно (20).

Теорема доказана. □

Теперь вейвлетное разложение (17) сплайна $v\in\Pi_Y$ можно переписать так:
$$v = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\, \mathfrak{T}_{i,X} + b_k\, \mathfrak{T}_{k,Y},$$
где коэффициенты a_i проекции и коэффициент b_k вейвлетной составляющей вычисляются по формулам (18) и (20).

Формулы (18) и (20), которые естественно назвать *формулами декомпозиции*, допускают обращение. А именно
$$c_j = a_j \ \text{ при } j\leqslant k-1, \quad c_j = a_{j-1} \ \text{ при } j\geqslant k+1;$$
$$c_k = b_k + \frac{s(y_{k+2}-y_{k+1})}{s(y_{k+2}-y_k)}\, a_{k-1} + \frac{s(y_{k+1}-y_k)}{s(y_{k+2}-y_k)}\, a_k\,.$$
Последние формулы являются *формулами реконструкции.* Они позволяют по коэффициентам a_i и b_k восстановить коэффициенты c_j разложения сплайна $v\in\Pi_Y$ по системе базисных сплайнов $\{\mathfrak{T}_{j,Y}\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

4°. Данная работа выполнена в русле исследований Ю. К. Демьяновича [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянович Ю. К. *Минимальные сплайны и всплески* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2008. Вып. 2. С. 8–22.

2. Демьянович Ю. К. *Вложенные пространства тригонометрических сплайнов и их всплесковые разложения* // Матем. заметки. 2005. Т. 78. Вып. 5. С. 658–675.