ПЕРЕСТАНОВКИ И КРОНЕКЕРОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ*

В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков

malv@gamma.math.spbu.ru sc2@pisem.net

31 марта 2004 г.

Будут использоваться следующие обозначения:

$A_n = A_n[0:n-1, 0:n-1]$ — квадратная матрица порядка n, индексы строк и столбцов которой изменяются от 0 до $n-1$;

$I_n = I_n[0:n-1, 0:n-1]$ — единичная матрица порядка n.

1°. Пусть m, n — натуральные числа. Введём квадратную матрицу $L_{mn}^{(n)}$ порядка mn с элементами

$$L_{mn}^{(n)}[i + j\,m, i'\,n + j'] = \begin{cases} 1, & \text{если } i' = i \text{ и } j' = j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $i, i' \in 0:m-1$, $j, j' \in 0:n-1$. При $m=2$, $n=3$ имеем

$$L_6^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$L_n^{(n)} = I_n\,, \qquad L_m^{(1)} = I_m\,. \tag{1}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Умножение матрицы $L_{mn}^{(n)}$ на вектор $x \in \mathbb{C}^{mn}$ порождает вектор $X = L_{mn}^{(n)} x$ с компонентами

$$X(i + j\,m) = x(i\,n + j)\,, \qquad i \in 0 : m-1, \quad j \in 0 : n-1\,. \tag{2}$$

Действительно,

$$X(i + j\,m) = \sum_{i'=0}^{m-1} \sum_{j'=0}^{n-1} L_{mn}^{(n)}[i + j\,m, i'\,n + j'] \times x(i'\,n + j') = x(i\,n + j)\,.$$

В каждой строке и каждом столбце матрицы $L_{mn}^{(n)}$ лишь один элемент отличен от нуля (равен единице). Такие матрицы называются *матрицами перестановок*. Для $L_{mn}^{(n)}$ как матрицы перестановок справедлива формула $\big(L_{mn}^{(n)}\big)^{-1} = \big(L_{mn}^{(n)}\big)^{T}$. Можно получить более точный результат.

ЛЕММА 1. $\big(L_{mn}^{(n)}\big)^{-1} = L_{mn}^{(m)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить, что $L_{mn}^{(n)} L_{mn}^{(m)} = I_{mn}$. Имеем

$$\Big(L_{mn}^{(n)} L_{mn}^{(m)}\Big)[i + j\,m, i' + j'\,m] = \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{n-1} L_{mn}^{(n)}[i + j\,m, i_1\,n + j_1] \times$$
$$\times\, L_{mn}^{(m)}[i_1\,n + j_1, i' + j'\,m] = L_{mn}^{(m)}[j + i\,n, j'\,m + i']\,.$$

Последнее выражение равно единице только при $j' = j$, $i' = i$. □

ЛЕММА 2. *Пусть $N = rmn$. Тогда*

$$L_N^{(mn)} = L_N^{(m)} L_N^{(n)}\,. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $X = L_N^{(mn)} x$. Согласно (2)

$$X(i + j\,r) = x(i\,mn + j)\,, \qquad i \in 0 : r-1, \quad j \in 0 : mn-1\,.$$

Представим индекс j в виде $j = k\,n + l$, $l \in 0 : n-1$, $k \in 0 : m-1$. Получим

$$X(k\,nr + l\,r + i) = x(i\,mn + k\,n + l)\,.$$

Вектор $Y = L_N^{(n)} x$ имеет координаты

$$Y(p + l\,mr) = x(p\,n + l)\,, \qquad l \in 0 : n-1, \quad p \in 0 : mr-1\,.$$

Вычислим координаты вектора $Z = L_N^{(m)} Y$:

$$Z(k\,nr + l\,r + i) = Y((l\,r + i)\,m + k) = Y(l\,rm + (i\,m + k)) =$$
$$= x((i\,m + k)\,n + l) = x(i\,mn + k\,n + l) = X(k\,nr + l\,r + i)\,.$$

Значит, $Z = X$, т. е. $\big(L_N^{(m)} L_N^{(n)}\big)\, x = L_N^{(mn)} x$. Отсюда очевидным образом следует (3). □

З а м е ч а н и я.

1. Согласно (3), $L_N^{(nm)} = L_N^{(n)} L_N^{(m)}$, так что

$$L_N^{(m)} L_N^{(n)} = L_N^{(n)} L_N^{(m)}\,.$$

2. В условиях леммы 2 справедлива формула

$$L_N^{(rm)} L_N^{(nr)} = L_N^{(r)}\,. \tag{4}$$

Действительно, $L_N^{(rm)} L_N^{(nr)} = \bigl(L_N^{(rm)} L_N^{(n)}\bigr) L_N^{(r)} = L_N^{(r)}$.

2°. *Кронекеровым произведением* матриц A_m и B_n называется матрица $D_{mn} = A_m \otimes B_n$ с элементами

$$D_{mn}[i\,n+j, i'\,n+j'] = A_m[i,i'] B_n[j,j']\,, \qquad i,i' \in 0:m-1, \quad j,j' \in 0:n-1\,.$$

Более наглядно

$$D_{mn} = \begin{bmatrix} A_m[0,0]\,B_n & A_m[0,1]\,B_n & \dots & A_m[0,m-1]\,B_n \\ A_m[1,0]\,B_n & A_m[1,1]\,B_n & \dots & A_m[1,m-1]\,B_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ A_m[m-1,0]\,B_n & A_m[m-1,1]\,B_n & \dots & A_m[m-1,m-1]\,B_n \end{bmatrix}.$$

Операция кронекерова умножения ассоциативна, т. е.

$$\bigl(A_m \otimes B_n\bigr) \otimes C_p = A_m \otimes \bigl(B_n \otimes C_p\bigr)\,.$$

Проверим это. При $i \in 0:m-1$, $j \in 0:n-1$, $k \in 0:p-1$ имеем

$$\begin{aligned} &\Bigl(\bigl(A_m \otimes B_n\bigr) \otimes C_p\Bigr)[i\,np + j\,p + k, i'\,np + j'\,p + k'] = \\ &\qquad = \Bigl(\bigl(A_m \otimes B_n\bigr) \otimes C_p\Bigr)[(i\,n+j)\,p + k, (i'\,n+j')\,p + k')] = \\ &\qquad = \bigl(A_m \otimes B_n\bigr)[i\,n+j, i'\,n+j'] C_p[k,k'] = A_m[i,i'] B_n[j,j'] C_p[k,k']\,. \end{aligned}$$

Вместе с тем,

$$\begin{aligned} &\Bigl(A_m \otimes \bigl(B_n \otimes C_p\bigr)\Bigr)[i\,np + j\,p + k, i'\,np + j'\,p + k'] = \\ &\qquad = \Bigl(A_m \otimes \bigl(B_n \otimes C_p\bigr)\Bigr)[i\,np + (j\,p + k), i'\,np + (j'\,p + k')] = \\ &\qquad = A_m[i,i'] \bigl(B_n \otimes C_p\bigr)[j\,p+k, j'\,p+k'] = A_m[i,i'] B_n[j,j'] C_p[k,k']\,. \end{aligned}$$

Ассоциативность установлена.

Коммутативность заменяется следующим свойством.

ТЕОРЕМА 1. $B_n \otimes A_m = L_{mn}^{(n)}\big(A_m \otimes B_n\big)L_{mn}^{(m)}$.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно проверить, что

$$L_{mn}^{(m)}\big(B_n \otimes A_m\big) = \big(A_m \otimes B_n\big)L_{mn}^{(m)}\,. \tag{5}$$

Сравним элементы с индексами $(j+i\,n, j'\,m+i')$, $i, i' \in 0 : m-1$, $j, j' \in 0 : n-1$. Имеем

$$\sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{j_1=0}^{n-1} L_{mn}^{(m)}[j+i\,n, j_1\,m+i_1] \times \big(B_n \otimes A_m\big)[j_1\,m+i_1, j'\,m+i'] =$$
$$= \big(B_n \otimes A_m\big)[j\,m+i, j'\,m+i'] = B_n[j,j']A_m[i,i']\,.$$

Вместе с тем,

$$\sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{j_1=0}^{n-1} \big(A_m \otimes B_n\big)[j+i\,n, j_1+i_1\,n] \times L_{mn}^{(m)}[j_1+i_1\,n, j'\,m+i'] =$$
$$= \big(A_m \otimes B_n\big)[i\,n+j, i'\,n+j'] = A_m[i,i']B_n[j,j']\,.$$

Равенство (5), равносильное утверждение теоремы, установлено. □

3°. В лемме 2 указана факторизация матрицы перестановок $L_{mn}^{(n)}$, связанная с разложением на множители верхнего индекса. Существует факторизация, связанная с разложением на множители нижнего индекса.

ЛЕММА 3. *Пусть* $N = rmn$. *Тогда*

$$L_N^{(n)} = \big(L_{rn}^{(n)} \otimes I_m\big)\big(I_r \otimes L_{mn}^{(n)}\big)\,. \tag{6}$$

Доказательство. Вектор $X = L_N^{(n)}\,x$ имеет компоненты

$$X(i+j\,rm) = x(i\,n+j)\,, \qquad i \in 0 : rm-1, \quad j \in 0 : n-1\,.$$

Положив $i = k\,m+l$, $l \in 0 : m-1$, $k \in 0 : r-1$, получим

$$X(j\,rm+k\,m+l) = x(k\,mn+l\,n+j)\,.$$

Введём вектор $Y = \big(I_r \otimes L_{mn}^{(n)}\big)\,x$. Для него

$$Y(k\,mn+j\,m+l) = \sum_{k'=0}^{r-1}\sum_{j'=0}^{n-1}\sum_{l'=0}^{m-1} \big(I_r \otimes L_{mn}^{(n)}\big)[k\,mn+j\,m+l, k'\,mn+l'\,n+j'] \times$$
$$\times\, x(k'\,mn+l'\,n+j') = \sum_{k'=0}^{r-1}\sum_{j'=0}^{n-1}\sum_{l'=0}^{m-1} I_r[k,k'] \times L_{mn}^{(n)}[l+j\,m, l'\,n+j'] \times$$
$$\times\, x(k'\,mn+l'\,n+j') = x(k\,mn+l\,n+j)\,.$$

Вычислим компоненты вектора $Z = \left(L_{rn}^{(n)} \otimes I_m\right) Y$:

$$
\begin{aligned}
&Z(j\,rm + k\,m + l) = \\
&= \sum_{k'=0}^{r-1} \sum_{j'=0}^{n-1} \sum_{l'=0}^{m-1} \left(L_{rn}^{(n)} \otimes I_m\right)[(j\,r+k)\,m+l, (k'\,n+j')\,m+l'] \times Y((k'\,n+j')\,m+l') = \\
&\qquad = \sum_{k'=0}^{r-1} \sum_{j'=0}^{n-1} \sum_{l'=0}^{m-1} L_{rn}^{(n)}[k+j\,r, k'\,n+j'] \times I_m[l,l'] \times Y((k'\,n+j')\,m+l') = \\
&\qquad\qquad = Y((k\,n+j)\,m+l) = x(k\,mn + l\,n + j) = X(j\,rm + k\,m + l)\,.
\end{aligned}
$$

Значит, $Z = X$, т. е. $\left(L_{rn}^{(n)} \otimes I_m\right)\left(I_r \otimes L_{mn}^{(n)}\right) x = L_N^{(n)}\, x$. Отсюда очевидным образом следует (6). $\square$

4°. Между кронекеровым и обычным произведениями матриц имеется глубокая связь.

ТЕОРЕМА 2. *Справедлива формула*

$$
\left(A_m \otimes B_n\right)\left(G_m \otimes H_n\right) = \left(A_m G_m\right) \otimes \left(B_n H_n\right).
$$

Доказательство. Сравним элементы с индексами $(i\,n+j, i'\,n+j')$, $i, i' \in$ $\in 0 : m-1$, $j, j' \in 0 : n-1$. Запишем

$$
\begin{aligned}
&\Big(\left(A_m \otimes B_n\right)\left(G_m \otimes H_n\right)\Big)[i\,n+j, i'\,n+j'] = \\
&\quad = \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{n-1} \left(A_m \otimes B_n\right)[i\,n+j, i_1\,n+j_1] \times \left(G_m \otimes H_n\right)[i_1\,n+j_1, i'\,n+j'] = \\
&\qquad = \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{n-1} A_m[i,i_1] \times B_n[j,j_1] \times G_m[i_1,i'] \times H_n[j_1,j'] = \\
&\qquad = \sum_{i_1=0}^{m-1} A_m[i,i_1] \times G_m[i_1,i'] \sum_{j_1=0}^{n-1} B_n[j,j_1] \times H_n[j_1,j'] = \\
&\qquad\qquad = \left(A_m G_m\right)[i,i']\left(B_n H_n\right)[j,j']\,.
\end{aligned}
$$

Остаётся учесть, что

$$
\Big(\left(A_m G_m\right) \otimes \left(B_n H_n\right)\Big)[i\,n+j, i'\,n+j'] = \left(A_m G_m\right)[i,i']\left(B_n H_n\right)[j,j']\,.
$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 2 допускает естественные обобщения.

ЛЕММА 4. *Для пар квадратных матриц* $A_{\nu,m}$, $B_{\nu,n}$, $\nu = 1, \ldots, s$, *порядков* m *и* n *соответственно справедлива формула*

$$\prod_{\nu=1}^{s} \left(A_{\nu,m} \otimes B_{\nu,n}\right) = \left(\prod_{\nu=1}^{s} A_{\nu,m}\right) \otimes \left(\prod_{\nu=1}^{s} B_{\nu,n}\right).$$

Доказательство. При $s = 2$ утверждение леммы следует из теоремы 2. Сделаем индукционный переход от s к $s+1$. Согласно индукционному предположению и теореме 2 имеем

$$\prod_{\nu=1}^{s+1} \left(A_{\nu,m} \otimes B_{\nu,n}\right) = \left(\left(\prod_{\nu=1}^{s} A_{\nu,m}\right) \otimes \left(\prod_{\nu=1}^{s} B_{\nu,n}\right)\right)\left(A_{s+1,m} \otimes B_{s+1,n}\right) =$$
$$= \left(\prod_{\nu=1}^{s+1} A_{\nu,m}\right) \otimes \left(\prod_{\nu=1}^{s+1} B_{\nu,n}\right).$$

Лемма доказана. □

ТЕОРЕМА 3. *Справедлива формула*

$$\prod_{\nu=1}^{s} \left(A_{\nu,n_1} \otimes B_{\nu,n_2} \otimes \cdots \otimes G_{\nu,n_p}\right) = \left(\prod_{\nu=1}^{s} A_{\nu,n_1}\right) \otimes \left(\prod_{\nu=1}^{s} B_{\nu,n_2}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\prod_{\nu=1}^{s} G_{\nu,n_p}\right). \tag{7}$$

Доказательство. При $p = 2$ теорема 3 соответствует лемме 4. Сделаем индукционный переход от p к $p+1$. В силу леммы 4 и индукционного предположения имеем

$$\prod_{\nu=1}^{s} \left(A_{\nu,n_1} \otimes B_{\nu,n_2} \otimes \cdots \otimes G_{\nu,n_p} \otimes H_{\nu,n_{p+1}}\right) =$$
$$= \left(\prod_{\nu=1}^{s} \left(A_{\nu,n_1} \otimes B_{\nu,n_2} \otimes \cdots \otimes G_{\nu,n_p}\right)\right) \otimes \left(\prod_{\nu=1}^{s} H_{\nu,n_{p+1}}\right) =$$
$$= \left(\prod_{\nu=1}^{s} A_{\nu,n_1}\right) \otimes \left(\prod_{\nu=1}^{s} B_{\nu,n_2}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\prod_{\nu=1}^{s} G_{\nu,n_p}\right) \otimes \left(\prod_{\nu=1}^{s} H_{\nu,n_{p+1}}\right).$$

Теорема доказана. □

5°. Рассмотрим некоторые приложения предыдущих результатов. Пусть $N = n_1 n_2 \dots n_s$. Обозначим $\Delta_1 = 1$; $\Delta_\nu = n_1 n_2 \dots n_{\nu-1}$, $\nu = 2, \dots, s+1$; $N_\nu = N/\Delta_{\nu+1}$. Очевидно, что $N_0 = N$, $N_s = 1$ и $N_\nu = n_{\nu+1} \dots n_s$ при $\nu = 1, \dots, s-1$.

ТЕОРЕМА 4. *Справедлива формула*

$$A_{n_1} \otimes A_{n_2} \otimes \dots \otimes A_{n_s} = \prod_{\nu=1}^{s} \bigl(I_{\Delta_\nu} \otimes A_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu}\bigr). \tag{8}$$

Более того, сомножители в правой части (8) *можно переставлять в любом порядке.*

Доказательство. Воспользуемся соотношением (7). Приняв во внимание, что $I_m \otimes I_n = I_{mn}$, запишем

$$A_{n_1} \otimes A_{n_2} \otimes \dots \otimes A_{n_s} = \bigl(A_{n_1} \underbrace{I_{n_1} \dots I_{n_1}}_{(s-1)\text{ раз}}\bigr) \otimes \bigl(I_{n_2} A_{n_2} \underbrace{I_{n_2} \dots I_{n_2}}_{(s-2)\text{ раза}}\bigr) \otimes \dots \otimes$$
$$\otimes \bigl(\underbrace{I_{n_s} \dots I_{n_s}}_{(s-1)\text{ раз}} A_{n_s}\bigr) = \bigl(A_{n_1} \otimes I_{N_1}\bigr)\bigl(I_{n_1} \otimes A_{n_2} \otimes I_{N_2}\bigr) \dots \bigl(I_{\Delta_s} \otimes A_{n_s}\bigr). \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) равносильны, поскольку $I_{\Delta_1} = I_{N_s} = I_1 = (1)$ и $I_{n_1} = I_{\Delta_2}$.

Возможность переставлять сомножители в правой части (8) следует из того, что матрицу A_{n_ν} можно получить, заменив в произведении $\underbrace{I_{n_\nu} I_{n_\nu} \dots I_{n_\nu}}_{s\text{ раз}}$ *любой* сомножитель на A_{n_ν}. Теорема доказана. □

Теорема 4 служит основой для вывода других вариантов факторизации кронекерова произведения матриц.

ТЕОРЕМА 5. *Справедлива формула*

$$A_{n_1} \otimes A_{n_2} \otimes \dots \otimes A_{n_s} = \prod_{\nu=1}^{s} \bigl(I_{\Delta_\nu} \otimes L_{N_{\nu-1}}^{(n_\nu)}\bigr)\bigl(I_{N/n_\nu} \otimes A_{n_\nu}\bigr)\bigl(I_{\Delta_\nu} \otimes L_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)}\bigr). \tag{10}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и леммы 4 имеем

$$I_{\Delta_\nu} \otimes \bigl(A_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu}\bigr) = \bigl(I_{\Delta_\nu} I_{\Delta_\nu} I_{\Delta_\nu}\bigr) \otimes \Bigl(L_{N_{\nu-1}}^{(n_\nu)} \bigl(I_{N_\nu} \otimes A_{n_\nu}\bigr) L_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)}\Bigr) =$$
$$= \bigl(I_{\Delta_\nu} \otimes L_{N_{\nu-1}}^{(n_\nu)}\bigr)\bigl(I_{N/n_\nu} \otimes A_{n_\nu}\bigr)\bigl(I_{\Delta_\nu} \otimes L_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)}\bigr).$$

Подставляя это в правую часть (8), приходим к (10). □

Отметим, что согласно (1)

$$I_{\Delta_s} \otimes L^{(n_s)}_{N_{s-1}} = I_{\Delta_s} \otimes L^{(n_s)}_{n_s} = I_N \,,$$
$$I_{\Delta_s} \otimes L^{(N_s)}_{N_{s-1}} = I_{\Delta_s} \otimes L^{(1)}_{n_s} = I_N \,.$$

ТЕОРЕМА 6. *Справедливо разложение*

$$A_{n_1} \otimes A_{n_2} \otimes \cdots \otimes A_{n_s} = \prod_{\nu=1}^{s} L_N^{(n_\nu)} \big(I_{N/n_\nu} \otimes A_{n_\nu} \big).$$

Доказательство. По теореме 1

$$\big(I_{\Delta_\nu} \otimes A_{n_\nu} \big) \otimes I_{N_\nu} = L_N^{(\Delta_{\nu+1})} \big(I_{N/n_\nu} \otimes A_{n_\nu} \big) L_N^{(N_\nu)} \,. \qquad (11)$$

Теперь два соседних сомножителя из правой части (8) приводятся к виду

$$L_N^{(\Delta_\nu)} \big(I_{N/n_{\nu-1}} \otimes A_{n_{\nu-1}} \big) \big(L_N^{(N_{\nu-1})} L_N^{(\Delta_{\nu+1})} \big) \big(I_{N/n_\nu} \otimes A_{n_\nu} \big) L_N^{(N_\nu)} \,.$$

Поскольку $N_{\nu-1}\Delta_{\nu+1} = n_\nu N$, то согласно (4) $L_N^{(N_{\nu-1})} L_N^{(\Delta_{\nu+1})} = L_N^{(n_\nu)}$. Заключение теоремы становится очевидным, если учесть, что в правой части (11) при $\nu = 1$ и $\nu = s$ соответственно $L_N^{(\Delta_2)} = L_N^{(n_1)}$ и $L_N^{(N_s)} = L_N^{(1)} = I_N$. □

ТЕОРЕМА 7. *Справедливо разложение*

$$A_{n_1} \otimes A_{n_2} \otimes \cdots \otimes A_{n_s} = \prod_{\nu=1}^{s} \big(A_{n_\nu} \otimes I_{N/n_\nu} \big) L_N^{(n_\nu)}.$$

Доказательство аналогично предыдущему. Вместо (11) используется формула

$$I_{\Delta_\nu} \otimes \big(A_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu} \big) = L_N^{(\Delta_\nu)} \big(A_{n_\nu} \otimes I_{N/n_\nu} \big) L_N^{(N_{\nu-1})} \,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson J., Johnson R. W., Rodriguez D., Tolimieri R. *A methodology for designing, modifying and implementing Fourier transform algorithms on various architectures* // Circuits, Systems and Signal Processing. 1990. V. 9. No. 4. P. 449–500.

2. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. *Матрицы и вычисления.* М.: Наука, 1984. С. 80–82.