ФАКТОРИЗАЦИЯ КУЛИ-ТЬЮКИ МАТРИЦЫ ФУРЬЕ*

В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков

malv@gamma.math.spbu.ru sc2@pisem.net

14 апреля 2004 г.

Будут использоваться следующие обозначения:

$A_n = A_n[0:n-1, 0:n-1]$ — квадратная матрица порядка n, индексы строк и столбцов которой изменяются от 0 до $n-1$;

$I_n = I_n[0:n-1, 0:n-1]$ — единичная матрица порядка n.

1°. Рассмотрим вопрос о факторизации матрицы Фурье F_N с элементами

$$F_N[k,l] = \omega_N^{kl}\,, \qquad k,l \in 0:N-1\,,$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из единицы. Нам потребуются две специальные матрицы — матрица перестановок $L_{mn}^{(n)}$ и диагональная матрица вращений $T_{mn}^{(m)}$. Они определяются так:

$$L_{mn}^{(n)}[i+j\,m, i'\,n+j'] = \begin{cases} 1\,, & \text{если } i'=i \text{ и } j'=j, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$T_{mn}^{(m)}[i+j\,m, i'+j'\,m] = \begin{cases} \omega_{mn}^{ij}\,, & \text{если } i'=i \text{ и } j'=j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $i,i' \in 0:m-1$, $j,j' \in 0:n-1$. Из определений следует, что

$$L_n^{(n)} = I_n\,, \qquad L_m^{(1)} = I_m\,, \qquad T_n^{(1)} = I_n\,. \tag{1}$$

Нетрудно проверить, что

$$\bigl(L_{mn}^{(n)}\bigr)^{-1} = \bigl(L_{mn}^{(n)}\bigr)^T = L_{mn}^{(m)}\,. \tag{2}$$

---

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$T_{mn}^{(m)} L_{mn}^{(n)} = L_{mn}^{(n)} T_{mn}^{(n)}\,. \tag{3}$$

Доказательство. Сравним элементы с индексами $(i+j\,m, i'\,n+j')$. Имеем

$$\Big(T_{mn}^{(m)} L_{mn}^{(n)}\Big)[i+j\,m, i'\,n+j'] = \sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{j_1=0}^{n-1} T_{mn}^{(m)}[i+j\,m, i_1+j_1\,m]\times$$
$$\times\, L_{mn}^{(n)}[i_1+j_1\,m, i'\,n+j'] = \omega_{mn}^{ij}\, L_{mn}^{(n)}[i+j\,m, i'\,n+j'] =$$
$$= \begin{cases} \omega_{mn}^{ij}\,, & \text{если } i'=i \text{ и } j'=j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вместе с тем,

$$\Big(L_{mn}^{(n)} T_{mn}^{(n)}\Big)[i+j\,m, i'\,n+j'] = \sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{j_1=0}^{n-1} L_{mn}^{(n)}[i+j\,m, i_1\,n+j_1]\times$$
$$\times\, T_{mn}^{(n)}[i_1\,n+j_1, i'\,n+j'] = \omega_{mn}^{i'j'}\, L_{mn}^{(n)}[i+j\,m, i'\,n+j'] =$$
$$= \begin{cases} \omega_{mn}^{ij}\,, & \text{если } i'=i \text{ и } j'=j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Лемма доказана. □

2°. Матрицу Фурье порядка $N = mn$ можно разложить на множители (факторизовать).

ЛЕММА 2. *Справедлива формула*

$$F_{mn} = \big(F_m \otimes I_n\big) T_{mn}^{(n)} \big(I_m \otimes F_n\big) L_{mn}^{(m)}\,. \tag{4}$$

Знак $\otimes$ обозначает кронекерово умножение матриц [1].

Доказательство. В силу (2) достаточно проверить равенство

$$F_{mn} L_{mn}^{(n)} = \big(F_m \otimes I_n\big) T_{mn}^{(n)} \big(I_m \otimes F_n\big)\,.$$

Сравним элементы с индексами $(i\,n+j, i'\,n+j')$. Имеем

$$\Big(F_{mn} L_{mn}^{(n)}\Big)[i\,n+j, i'\,n+j'] = \sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{j_1=0}^{n-1} F_{mn}[i\,n+j, i_1+j_1\,m]\times$$
$$\times\, L_{mn}^{(n)}[i_1+j_1\,m, i'\,n+j'] = F_{mn}[i\,n+j, i'+j'\,m] = \omega_{mn}^{(i\,n+j)(i'+j'\,m)} = \omega_m^{ii'}\,\omega_{mn}^{ji'}\,\omega_n^{jj'}\,.$$

Вместе с тем,

$$\Big(\big(F_m \otimes I_n\big) T_{mn}^{(n)} \big(I_m \otimes F_n\big)\Big)[i\,n+j, i'\,n+j'] = \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{n-1} \big(F_m \otimes I_n\big)[i\,n+j, i_1\,n+j_1] \times$$

$$\times T_{mn}^{(n)}[i_1\,n+j_1, i_1\,n+j_1] \times \big(I_m \otimes F_n\big)[i_1\,n+j_1, i'\,n+j'] = \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{n-1} F_m[i, i_1] \times I_n[j, j_1] \times$$

$$\times \omega_{mn}^{i_1 j_1} \times I_m[i_1, i'] \times F_n[j_1, j'] = F_m[i, i']\, \omega_{mn}^{ji'}\, F_n[j, j'] = \omega_m^{ii'}\, \omega_{mn}^{ji'}\, \omega_n^{jj'}\,.$$

Лемма доказана. □

Разложение (4) представляет собой наиболее совершенную форму результата, полученного Кули и Тьюки [2].

Лемма 2 допускает обобщение на тот случай, когда порядок N матрицы Фурье является произведением s натуральных чисел, отличных от единицы, т. е. $N = n_1 n_2 \ldots n_s$. Обозначим $\Delta_1 = 1$, $\Delta_\nu = n_1 n_2 \ldots n_{\nu-1}$ при $\nu = 2, \ldots, s+1$; $N_\nu = N/\Delta_{\nu+1}$. Очевидно, что $N_0 = N$, $N_s = 1$ и $N_\nu = n_{\nu+1} \ldots n_s$ при $\nu = 1, \ldots, s-1$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $N = n_1 n_2 \ldots n_s$. Тогда*

$$F_N = \left(\prod_{\nu=1}^{s} \Big(I_{\Delta_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu} \Big) \Big(I_{\Delta_\nu} \otimes T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \Big) \right) R_N^T\,, \tag{5}$$

где

$$R_N = \prod_{\nu=1}^{s-1} \Big(I_{\Delta_\nu} \otimes L_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \Big)\,.$$

Доказательство. При $s = 2$ имеем $N = n_1 n_2$, $N_1 = n_2$, $N_2 = 1$, так что согласно (1) и (2)

$$\Big(I_{\Delta_1} \otimes F_{n_1} \otimes I_{N_1} \Big) \Big(I_{\Delta_1} \otimes T_{N_0}^{(N_1)} \Big) = \big(F_{n_1} \otimes I_{n_2} \big) T_N^{(n_2)}\,,$$

$$\Big(I_{\Delta_2} \otimes F_{n_2} \otimes I_{N_2} \Big) \Big(I_{\Delta_2} \otimes T_{N_1}^{(N_2)} \Big) = I_{n_1} \otimes F_{n_2}\,,$$

$$R_N = I_{\Delta_1} \otimes L_{N_0}^{(N_1)} = L_N^{(n_2)}\,, \qquad R_N^T = L_N^{(n_1)}\,.$$

Формула (5) принимает вид

$$F_{n_1 n_2} = \big(F_{n_1} \otimes I_{n_2} \big) T_{n_1 n_2}^{(n_2)} \big(I_{n_1} \otimes F_{n_2} \big) L_{n_1 n_2}^{(n_1)}\,.$$

Это соответствует (4) при $m = n_1$, $n = n_2$.

Сделаем индукционный переход от s к $s+1$. Пусть $N = n_1 \ldots n_s n_{s+1}$. На основании (4) запишем

$$F_{n_1(n_2\ldots n_{s+1})} = \big(F_{n_1} \otimes I_{n_2\ldots n_{s+1}}\big) T_N^{(n_2\ldots n_{s+1})} \big(I_{n_1} \otimes F_{n_2\ldots n_{s+1}}\big) L_N^{(n_1)} \,.$$

Здесь

$$\big(F_{n_1} \otimes I_{n_2\ldots n_{s+1}}\big) T_N^{(n_2\ldots n_{s+1})} = \Big(I_{\Delta_1} \otimes F_{n_1} \otimes I_{N_1}\Big)\Big(I_{\Delta_1} \otimes T_{N_0}^{(N_1)}\Big)$$

и в силу индукционного предположения

$$\begin{aligned} I_{n_1} \otimes F_{n_2\ldots n_{s+1}} = I_{n_1} \otimes \Bigg[\Bigg(\prod_{\nu=2}^{s+1} \Big(I_{n_2\ldots n_{\nu-1}} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{n_{\nu+1}\ldots n_{s+1}}\Big) \times \\ \times \Big(I_{n_2\ldots n_{\nu-1}} \otimes T_{n_\nu\ldots n_{s+1}}^{(n_{\nu+1}\ldots n_{s+1})}\Big)\Bigg) R_{n_2\ldots n_{s+1}}^T\Bigg] = \\ = \Bigg(\prod_{\nu=2}^{s+1} \Big(I_{\Delta_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu}\Big)\Big(I_{\Delta_\nu} \otimes T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)}\Big)\Bigg)\Big(I_{n_1} \otimes R_{n_2\ldots n_{s+1}}^T\Big) \,. \end{aligned}$$

Остаётся проверить, что

$$\big(I_{n_1} \otimes R_{n_2\ldots n_{s+1}}^T\big) L_N^{(n_1)} = R_{n_1 n_2\ldots n_{s+1}}^T$$

или, после транспонирования[1],

$$L_N^{(N_1)} \big(I_{n_1} \otimes R_{n_2\ldots n_{s+1}}\big) = R_{n_1 n_2\ldots n_{s+1}} \,. \tag{6}$$

Имеем

$$I_{n_1} \otimes R_{n_2\ldots n_{s+1}} = I_{n_1} \otimes \Bigg(\prod_{\nu=2}^{s} \Big(I_{n_2\ldots n_{\nu-1}} \otimes L_{n_\nu\ldots n_{s+1}}^{(n_{\nu+1}\ldots n_{s+1})}\Big)\Bigg) = \prod_{\nu=2}^{s} \Big(I_{\Delta_\nu} \otimes L_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)}\Big) \,.$$

К этому нужно добавить, что $L_N^{(N_1)} = I_{\Delta_1} \otimes L_{N_0}^{(N_1)}$. Формула (6), а с ней и теорема, доказаны. □

3°. Установим, что при $N = n^s$ матрица R_N^T из правой части (5) совпадает с матрицей реверсных перестановок Rev_{n^s}. Напомним определение последней.

Любое число $i \in 0 : n^s - 1$ посредством последовательного деления на n можно единственным образом представить в виде

$$i = i_{s-1}\, n^{s-1} + i_{s-2}\, n^{s-2} + \cdots + i_0 \,, \tag{7}$$

[1] $(AB)^T = B^T A^T$ и $(A \otimes B)^T = (A^T \otimes B^T)$

где $i_\nu \in 0 : n-1$ при всех $\nu \in 0 : s-1$. Вместо (7) используется более компактная запись $i = (i_{s-1}, i_{s-2}, \dots, i_0)_n$, правая часть которой называется n-ичным кодом числа i. Число с перевёрнутым n-ичным кодом обозначается $\mathrm{rev}_s(i)$. Таким образом, $\mathrm{rev}_s(i) = (i_0, i_1, \dots, i_{s-1})_n$. Матрица реверсных перестановок Rev_{n^s} определяется так:

$$\mathrm{Rev}_{n^s}[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \mathrm{rev}_s(i), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $i, j \in 0 : n^s - 1$. При $s = 1$ имеем $\mathrm{Rev}_n = I_n$. Действие матрицы Rev_{n^s} на вектор x приводит к вектору $X = \mathrm{Rev}_{n^s}\, x$ с компонентами $X(i) = x(\mathrm{rev}_s(i))$, $i \in 0 : n^s - 1$.

ЛЕММА 3. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$\mathrm{Rev}_{n^s} = \big(I_n \otimes \mathrm{Rev}_{n^{s-1}}\big) L_{n^s}^{(n)}, \qquad s = 2, 3, \dots \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим $X = \mathrm{Rev}_{n^s}\, x$. Тогда

$$X(i + j\, n^{s-1}) = x\big(\mathrm{rev}_s(i + j\, n^{s-1})\big), \qquad i \in 0 : n^{s-1} - 1, \quad j \in 0 : n - 1.$$

Для числа $i + j\, n^{s-1} = j\, n^{s-1} + i_{s-2}\, n^{s-2} + \dots + i_0$ имеем

$$\mathrm{rev}_s(i + j\, n^{s-1}) = i_0\, n^{s-1} + \dots + i_{s-2}\, n + j = n\, \mathrm{rev}_{s-1}(i) + j.$$

Значит,

$$X(i + j\, n^{s-1}) = x\big(n\, \mathrm{rev}_{s-1}(i) + j\big), \qquad i \in 0 : n^{s-1} - 1, \quad j \in 0 : n - 1. \tag{9}$$

Обозначим $Y = L_{n^s}^{(n)}\, x$. Для этого вектора

$$Y(i + j\, n^{s-1}) = x(i\, n + j).$$

Найдём компоненты вектора $Z = \big(I_n \otimes \mathrm{Rev}_{n^{s-1}}\big) Y$:

$$Z(i + j\, n^{s-1}) = \sum_{i'=0}^{n^{s-1}-1} \sum_{j'=0}^{n-1} \big(I_n \otimes \mathrm{Rev}_{n^{s-1}}\big)[i + j\, n^{s-1}, i' + j'\, n^{s-1}] \times Y(i' + j'\, n^{s-1}) =$$

$$= \sum_{i'=0}^{n^{s-1}-1} \sum_{j'=0}^{n-1} I_n[j, j'] \times \mathrm{Rev}_{n^{s-1}}[i, i'] \times Y(i' + j'\, n^{s-1}) =$$

$$= Y\big(\mathrm{rev}_{s-1}(i) + j\, n^{s-1}\big) = x\big(n\, \mathrm{rev}_{s-1}(i) + j\big).$$

Учитывая (9), получаем $Z = X$. Лемма доказана. □

Из (8) при $s = 2$ следует, что

$$\mathrm{Rev}_{n^2} = L_{n^2}^{(n)} \,. \tag{10}$$

ЛЕММА 4. *Справедливо разложение*

$$\mathrm{Rev}_{n^s} = \prod_{\nu=1}^{s-1} \Big(I_{\Delta_{s-\nu}} \otimes L_{\Delta_{\nu+2}}^{(n)} \Big) \,, \tag{11}$$

где $\Delta_\nu = n^{\nu-1}$.

Доказательство. При $s = 2$ формула (11) совпадает с (10). Сделаем индукционный переход от s к $s+1$. Согласно индукционному предположению (11) и соотношению (8) имеем

$$\mathrm{Rev}_{n^{s+1}} = \left(I_n \otimes \prod_{\nu=1}^{s-1} \Big(I_{\Delta_{s-\nu}} \otimes L_{\Delta_{\nu+2}}^{(n)} \Big) \right) L_{n^{s+1}}^{(n)} =$$

$$= \left(\prod_{\nu=1}^{s-1} \Big(I_{\Delta_{s+1-\nu}} \otimes L_{\Delta_{\nu+2}}^{(n)} \Big) \right) \Big(I_{\Delta_1} \otimes L_{\Delta_{s+2}}^{(n)} \Big) = \prod_{\nu=1}^{s} \Big(I_{\Delta_{s+1-\nu}} \otimes L_{\Delta_{\nu+2}}^{(n)} \Big) \,.$$

Лемма доказана. $\square$

Вернёмся к матрице R_N и отметим, что

$$R_N^T = \prod_{\nu=1}^{s-1} \Big(I_{\Delta_{s-\nu}} \otimes L_{N_{s-\nu-1}}^{(n_{s-\nu})} \Big) \,. \tag{12}$$

При $N = n^s$ имеем $N_{s-\nu-1} = n^{\nu+1} = \Delta_{\nu+2}$, поэтому правые части формул (11) и (12) совпадают. Значит, $R_N^T = \mathrm{Rev}_{n^s}$.

При $N = n^s$ формула (5) принимает вид

$$F_{n^s} = \left(\prod_{\nu=1}^{s} \Big(I_{\Delta_\nu} \otimes F_n \otimes I_{N_\nu} \Big) \Big(I_{\Delta_\nu} \otimes T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \Big) \right) \mathrm{Rev}_{n^s} \,, \tag{13}$$

где $\Delta_\nu = n^{\nu-1}$, $N_\nu = N/n^\nu$.

4°. Фундаментальное разложение (13) порождает другие варианты факторизации матрицы Фурье порядка $N = n^s$.

ТЕОРЕМА 2. *Справедлива формула*

$$F_{n^s} = \left(\prod_{\nu=1}^{s} \left[\Big(F_n \otimes I_{N/n} \Big) \Big(T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu} \Big) L_N^{(n)} \right] \right) \mathrm{Rev}_{n^s} \,. \tag{14}$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами операции кронекерова умножения матриц [1]. Запишем

$$I_{\Delta_\nu} \otimes \big(F_n \otimes I_{N_\nu}\big) = L_N^{(\Delta_\nu)}\big(F_n \otimes I_{N/n}\big) L_N^{(N_{\nu-1})} .$$

Поскольку $L_N^{(N_{\nu-1})} L_N^{(\Delta_\nu)} = I_N$, то

$$\Big(I_{\Delta_\nu} \otimes F_n \otimes I_{N_\nu}\Big)\Big(I_{\Delta_\nu} \otimes T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)}\Big) = L_N^{(\Delta_\nu)}\Big(F_n \otimes I_{N/n}\Big) L_N^{(N_{\nu-1})} L_N^{(\Delta_\nu)} \times$$
$$\times \Big(T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big) L_N^{(N_{\nu-1})} = L_N^{(\Delta_\nu)}\Big(F_n \otimes I_{N/n}\Big)\Big(T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big) L_N^{(N_{\nu-1})} .$$

Обозначим $H_N^{(\nu)} = \Big(F_n \otimes I_{N/n}\Big)\Big(T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big)$. Тогда последнее выражение примет вид $L_N^{(\Delta_\nu)} H_N^{(\nu)} L_N^{(N_{\nu-1})}$.

Преобразуем произведение двух соседних сомножителей в правой части (13). Принимая во внимание, что $L_N^{(N_{\nu-1})} L_N^{(\Delta_{\nu+1})} = L_N^{(n)}$, получаем

$$L_N^{(\Delta_\nu)} H_N^{(\nu)} L_N^{(N_{\nu-1})} L_N^{(\Delta_{\nu+1})} H_N^{(\nu+1)} L_N^{(N_\nu)} = L_N^{(\Delta_\nu)} H_N^{(\nu)} L_N^{(n)} H_N^{(\nu+1)} L_N^{(N_\nu)} .$$

Остаётся учесть, что $L_N^{(\Delta_1)} = L_N^{(1)} = I_N$ и $L_N^{(N_{s-1})} = L_N^{(n)}$. $\square$

С помощью равенства $F_n \otimes I_{N/n} = L_N^{(n)}\big(I_{N/n} \otimes F_n\big) L_N^{(N/n)}$ разложение (14) приводится к такому виду:

$$F_{n^s} = \left(\prod_{\nu=1}^{s} \Big[L_N^{(n)}\big(I_{N/n} \otimes F_n\big) G_N^{(\nu)}\Big]\right) \mathrm{Rev}_{n^s} ,$$

где $G_N^{(\nu)} = L_N^{(N/n)}\Big(T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big) L_N^{(n)}$.

Обозначим через $\lfloor \alpha \rfloor$ целую часть числа α.

ЛЕММА 5. *При всех $\nu \in 1:s$ матрица $G_N^{(\nu)}$ является диагональной. Для её диагональных элементов справедлива формула*

$$G_N^{(\nu)}[i + j\,n, i + j\,n] = \omega_{N_{\nu-1}}^{i\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor}, \qquad i \in 0:n-1, \quad j \in 0:n^{s-1}-1 . \qquad (15)$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}$ — диагональная матрица. Получим

$$G_N^{(\nu)}[i + j\,n, i' + j'\,n] = \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{j_1=0}^{N/n-1} L_N^{(N/n)}[i + j\,n, i_1\,N/n + j_1] \times$$
$$\times \Big(T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big)[i_1\,N/n + j_1, i_1\,N/n + j_1] \times L_N^{(n)}[i_1\,N/n + j_1, j'\,n + i'] =$$

$$= \Big(T^{(N_\nu)}_{N_{\nu-1}} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big)[i\,N/n + j, i\,N/n + j] \times L^{(n)}_N[j + i\,N/n, j'\,n + i'] =$$

$$= \begin{cases} \Big(T^{(N_\nu)}_{N_{\nu-1}} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big)[i\,N/n + j, i\,N/n + j]\,, & \text{если } i' = i \text{ и } j' = j, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $\nu = 1$ имеем

$$G^{(1)}_N[i + j\,n, i + j\,n] = T^{(N/n)}_N[i\,N/n + j, i\,N/n + j] = \omega^{ij}_N\,,$$

что соответствует (15). Нетрудно понять, что $G^{(s)}_N = I_N$. Это также находится в согласии с (15), поскольку $\lfloor j/\Delta_s \rfloor = 0$ при $j \in 0 : \Delta_s - 1$.

Пусть $\nu \in 2 : s - 1$. Представим индекс $j \in 0 : n^{s-1} - 1$ в виде $j = k_\nu\,\Delta_\nu + l_\nu$, где $l_\nu \in 0 : \Delta_\nu - 1$, $k_\nu \in 0 : N_\nu - 1$. Так как $N_\nu \Delta_\nu = N/n$, то

$$G^{(\nu)}_N[i + j\,n, i + j\,n] = \Big(T^{(N_\nu)}_{N_{\nu-1}} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big)\big[(i\,N_\nu + k_\nu)\Delta_\nu + l_\nu, (i\,N_\nu + k_\nu)\Delta_\nu + l_\nu\big] =$$
$$= T^{(N_\nu)}_{N_{\nu-1}}[i\,N_\nu + k_\nu, i\,N_\nu + k_\nu]\; I_{\Delta_\nu}[l_\nu, l_\nu] = \omega^{ik_\nu}_{N_{\nu-1}}\,.$$

Остаётся учесть, что $k_\nu = \lfloor j/\Delta_\nu \rfloor$. Лемма доказана. □

5°. Вернёмся к формуле Кули-Тьюки (4) и рассмотрим другой вариант её обобщения на случай нескольких сомножителей, отличный от указанного в теореме 1.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $N = n_1 n_2 \dots n_s$. Тогда*

$$F_N = \prod_{\nu=1}^{s} \Big(F_{n_\nu} \otimes I_{N/n_\nu}\Big)\Big(T^{(N_\nu)}_{N_{\nu-1}} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big)\Big(L^{(n_\nu)}_{N_{\nu-1}} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big)\,. \tag{16}$$

Доказательство. При $s = 2$ имеем $N = n_1 n_2$, $N_1 = n_2$, $N_2 = 1$, так что согласно (1)

$$\Big(F_{n_1} \otimes I_{N/n_1}\Big)\Big(T^{(N_1)}_{N_0} \otimes I_{\Delta_1}\Big)\Big(L^{(n_1)}_{N_0} \otimes I_{\Delta_1}\Big) = \big(F_{n_1} \otimes I_{n_2}\big) T^{(n_2)}_N L^{(n_1)}_N\,,$$
$$\Big(F_{n_2} \otimes I_{N/n_2}\Big)\Big(T^{(N_2)}_{N_1} \otimes I_{\Delta_2}\Big)\Big(L^{(n_2)}_{N_1} \otimes I_{\Delta_2}\Big) = F_{n_2} \otimes I_{n_1} = L^{(n_2)}_N \big(I_{n_1} \otimes F_{n_2}\big) L^{(n_1)}_N\,.$$

Формула (16) принимает вид

$$F_{n_1 n_2} = \big(F_{n_1} \otimes I_{n_2}\big) T^{(n_2)}_{n_1 n_2} \big(L^{(n_1)}_{n_1 n_2} L^{(n_2)}_{n_1 n_2}\big) \big(I_{n_1} \otimes F_{n_2}\big) L^{(n_1)}_{n_1 n_2} =$$
$$= \big(F_{n_1} \otimes I_{n_2}\big) T^{(n_2)}_{n_1 n_2} \big(I_{n_1} \otimes F_{n_2}\big) L^{(n_1)}_{n_1 n_2}\,.$$

Это соответствует (4) при $m = n_1$, $n = n_2$.

Сделаем индукционный переход от s к $s+1$. Пусть $N = n_1 \dots n_s n_{s+1}$. На основании (4) запишем

$$F_{n_1(n_2\dots n_{s+1})} = \big(F_{n_1} \otimes I_{N/n_1}\big) T_N^{(N_1)} \big(I_{n_1} \otimes F_{n_2\dots n_{s+1}}\big) L_N^{(n_1)} = \\ = \big(F_{n_1} \otimes I_{N/n_1}\big) T_N^{(N_1)} L_N^{(n_1)} \big(F_{n_2\dots n_{s+1}} \otimes I_{n_1}\big)\,.$$

Здесь

$$\big(F_{n_1} \otimes I_{N/n_1}\big) T_N^{(N_1)} L_N^{(n_1)} = \Big(F_{n_1} \otimes I_{N/n_1}\Big)\Big(T_{N_0}^{(N_1)} \otimes I_{\Delta_1}\Big)\Big(L_{N_0}^{(n_1)} \otimes I_{\Delta_1}\Big)$$

и в силу индукционного предположения

$$F_{n_2\dots n_{s+1}} \otimes I_{n_1} = \left(\prod_{\nu=2}^{s+1} \Big(F_{n_\nu} \otimes I_{(n_2\dots n_{s+1})/n_\nu}\Big)\Big(T_{n_\nu\dots n_{s+1}}^{(n_{\nu+1}\dots n_{s+1})} \otimes I_{n_2\dots n_{\nu-1}}\Big)\times\right.$$

$$\left.\times\Big(L_{n_\nu\dots n_{s+1}}^{(n_\nu)} \otimes I_{n_2\dots n_{\nu-1}}\Big)\right) \otimes I_{n_1} = \prod_{\nu=2}^{s+1} \Big(F_{n_\nu} \otimes I_{N/n_\nu}\Big)\Big(T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big)\Big(L_{N_{\nu-1}}^{(n_\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big)\,.$$

Значит,

$$F_{n_1 n_2\dots n_{s+1}} = \prod_{\nu=1}^{s+1} \Big(F_{n_\nu} \otimes I_{N/n_\nu}\Big)\Big(T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big)\Big(L_{N_{\nu-1}}^{(n_\nu)} \otimes I_{\Delta_\nu}\Big)\,.$$

Теорема доказана. □

6°. Сделаем два заключительных замечания.

1) При $N = n^s$ множество матриц перестановок $\big\{L_N^{(n^k)}\big\}_{k=0}^{s-1}$ образует циклическую группу по умножению. Это связано со свойством [1]

$$L_{rmn}^{(m)} L_{rmn}^{(n)} = L_{rmn}^{(mn)}\,. \tag{17}$$

Согласно (17), $L_{n^s}^{(n^k)} L_{n^s}^{(n)} = L_{n^s}^{(n^{k+1})}$ при $k \in 1 : s-1$. К тому же в силу (1) $L_{n^s}^{(1)} = I_{n^s}$ и $L_{n^s}^{(n^s)} = I_{n^s}$.

2) Матрица реверсных перестановок Rev_{n^s} симметрична. Действительно,

$$\big(\,\mathrm{Rev}_{n^s}\big)^T[i,j] = \mathrm{Rev}_{n^s}[j,i] = \begin{cases} 1\,, & \text{если } i = \mathrm{rev}_s(j), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку $\mathrm{rev}_s(\mathrm{rev}_s(j)) = j$, то условие $i = \mathrm{rev}_s(j)$ равносильно условию $j = \mathrm{rev}_s(i)$. Поэтому

$$\big(\,\mathrm{Rev}_{n^s}\big)^T[i,j] = \left\{\begin{matrix} 1\,, & \text{если } j = \mathrm{rev}_s(i), \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{matrix}\right\} = \mathrm{Rev}_{n^s}[i,j]\,.$$

Для симметричной матрицы перестановок Rev_{n^s} справедливо равентсво

$$\mathrm{Rev}_{n^s}\,\mathrm{Rev}_{n^s} = I_{n^s}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Перестановки и кронекерово произведение матриц* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 31 марта 2004 г.

2. Cooley J. W., Tukey J. W. *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series* // Math. Comput. 1965. V. 19. No. 90. P. 297–301.

3. Johnson J., Johnson R. W., Rodriguez D., Tolimieri R. *A methodology for designing, modifying and implementing Fourier transform algorithms on various architectures* // Circuits, Systems and Signal Processing. 1990. V. 9. No. 4. P. 449–500.

4. Temperton C. *Self-sorting mixed-radix Fast Fourier Transform* // J. Comput. Phys. 1983. V. 52. No. 1. P. 1–23.

5. Белый А. А., Бовбель Е. И., Микулович В. И. *Алгоритмы быстрого преобразования Фурье и их свойства* // Зарубежная радиоэлектроника. 1979. № 2. С. 3–29.